

MARIO RAMEH SAAB

**SÔBRE APLICAÇÕES DE S^3 EM S^2 COM CERTAS
ANTEIMAGENS DADAS**

**Grupo de Singularidades
ICMC - USP**

Tese apresentada à Escola de Engenharia
de São Carlos, Universidade de São Paulo,
para a obtenção do título de "Doutor".

SÃO CARLOS

1969

MARIO RAMEH SAAB

**SÔBRE APLICAÇÕES DE S^3 EM S^2 COM CERTAS
ANTEIMAGENS DADAS**

Tese apresentada à Escola de Engenharia
de São Carlos, Universidade de São Paulo,
para a obtenção do título de "Doutor".

SÃO CARLOS

1969

1911

1912

À MEMÓRIA DE MEU PAI

PREFÁCIO

Ao integrarmos o grupo de Matemática da EESC iniciamos, sob a orientação do Prof. Gilberto Francisco Loibel, os estudos nos campos da Topologia Algébrica e Topologia Diferencial, que constituem vigorosa área da Matemática, e têm produzido fortes repercussões em tôdas as outras áreas, dando novos instrumentos e novas técnicas para resolução de inúmeros problemas.

O nosso trabalho se enquadra mais dentro da Topologia Diferencial e tem caráter bastante geométrico.

Expressamos nossa gratidão ao orientador desta tese, Professor Gilberto Francisco Loibel, pelo constante estímulo e dedicação com que nos orientou, e manifestamos mais uma vez a nossa admiração pelo idealismo e entusiasmo com que se dedica à árdua tarefa de orientação e formação do seu grupo dentro do Departamento de Matemática de São Carlos, contribuindo assim, de maneira inestimável, para o desenvolvimento da pesquisa científica em nosso País.

Queremos expressar também os nossos agradecimentos à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) e ao Conselho Nacional de Pesquisas (CNPq), pelos auxílios que têm dado ao Departamento de Matemática de São Carlos para a aquisição de obras necessárias à pesquisa científica e que foram de real valia para o nosso trabalho.

Manifestamos ainda os nossos agradecimentos ao nosso colega Prof. Aldo Ventura por ter ouvido as nossas exposições e lidado o nosso trabalho, fazendo valiosas sugestões.

Manifestamos também os nossos agradecimentos à Secretária do Departamento, Aflete Di Nardo, pela dedicação e boa vontade na datilografia desta tese.

INTRODUÇÃO

Diversos autores estudaram o problema da extensão a um espaço X de uma aplicação $f: A \hookrightarrow X \rightarrow S^n$ ($n=1,2,\dots$). Mas nestes estudos exige-se apenas a continuidade e não a diferenciabilidade de f e da extensão. No nosso trabalho, os espaços são variedades diferenciáveis e impondo condições mais restritivas à natureza da extensão. Especificamente, dadas as variedades M^m e N^n , M_i ($i=1,\dots,k$) subvariedades compactas, disjuntas, de M^m e dados os pontos a_i ($i=1,\dots,k$), distintos, de N^n , perguntamos: existe aplicação diferenciável $f: M^m \rightarrow N^n$ tal que $f^{-1}(a_i) = M_i$, a_i valor regular de f ?

O nosso trabalho se restringirá aos casos $M = S^n$, $N = S^{n-m}$ e principalmente com $n = 3$, $m = 1$.

No Capítulo 0 citamos apenas alguns fatos básicos. No Capítulo I mostramos que é significativa a inclusão da condição " a_i valor regular de f ", sem a qual a extensão seria trivial, e que f é necessariamente extensão de uma aplicação diferenciável definida nas vizinhanças tubulares das $M_i \subset M$.

No Capítulo II mostramos que existe $f: S^3 \rightarrow S^2$ tal que $f^{-1}(a_i)$ seja constituída de uma reunião de circunferências planas, prefixadas, γ_{ij} ($j=1,\dots,\alpha_i$) duas a duas "separadas" (ver pg. 21), a_i valor regular de f .

Os Capítulos III e IV constituem a parte mais impor

III

tante d'este trabalho e têm por objetivo a demonstração do "Teorema Principal", enunciado à pg. 66.

As construções mais importantes são, no Cap. III, os parágrafos 4 a 11 que nos permitem construir a "Operação desvio" com a qual podemos garantir que se tivermos uma aplicação diferenciável $f': S^3 \rightarrow S^2$ tal que as imagens inversas de dois pontos distintos, a_1 e a_2 , de S^2 sejam dois nós dados, γ_1' e γ_2' , triviais ou não, disjuntos, regularmente imersos em S^3 , com número de entrelaçamento qualquer, e sendo a_1 valor regular de f' , então, a partir de f' , podemos construir uma outra aplicação diferenciável $f: S^3 \rightarrow S^2$ tal que as imagens inversas de a_1 e a_2 , sejam γ_1' e outro nó γ_2 , obtido de γ_2' , "desviando" d'este um pequeno trecho, de modo que o número de entrelaçamento aumente ou diminua de uma unidade, e sendo a_1 também valor regular de f .

No Capítulo IV, as construções mais importantes são no § 1, pgs. 69 a 73, que permitem deformar os nós dados de tal forma que seja possível aplicar no § 2 a "operação desvio" reduzindo o Teorema Principal à situação resolvida no Capítulo II.

C A P Í T U L O 0

NOÇÕES BÁSICAS

Neste capítulo focalizaremos as situações clássicas em que o problema da extensão tem sempre solução e daremos alguns conceitos relativos a uma aplicação diferenciável.

§ 1 - O problema da extensão

Sejam X e Y espaços topológicos, A um subconjunto fechado de X e $f:A \rightarrow Y$ uma aplicação contínua. Uma aplicação contínua $f':X \rightarrow Y$ tal que $f'(x) = f(x)$ para $x \in A$ é chamada uma extensão de f a X .

O problema da extensão é determinar condições sobre X , A , Y e f , necessárias ou suficientes, ou ambas, para a existência de uma f' .

§ 2 - Homotopia

2.1 - Sejam $f_0, f_1: X \rightarrow Y$ contínuas e I o intervalo $[0, 1]$

chado $0 \leq t \leq 1$. Dizemos que f_0 é homotópica a f_1 , e escrevemos $f_0 \sim f_1$, se existir uma aplicação contínua $F: X \times I \rightarrow Y$ tal que $F(x, 0) = f_0(x)$ e $F(x, 1) = f_1(x)$; a aplicação F é chamada uma homotopia entre f_0 e f_1 (ou de f_0 em f_1). Se $F(x, t) = f_0(x)$ para todo $x \in A$ dizemos que f_0 é homotópica a f_1 relativamente a A e denotamos isto com $f_0 \sim f_1 \text{ rel } A$.

Para cada t definimos $f_t: X \rightarrow Y$ por

$$f_t(x) = F(x, t)$$

2.2 - Consideremos o espaço produto $X \times I$, seu subespaço $M = (X \times 0) \cup (X \times 1)$ e a aplicação $\phi: M \rightarrow Y$ definida por $\phi(x, 0) = f_0(x)$, $\phi(x, 1) = f_1(x)$ para todo $x \in X$. Então toda extensão $F: X \times I \rightarrow Y$ de ϕ é uma homotopia entre f_0 e f_1 e vice-versa. Isto é, $f_0 \sim f_1$ se e somente se ϕ se estende a $X \times I$.

§ 3 - Condições especiais para existência de extensões contínuas

3.1 - Sejam $Y = A \subset X$ e $f =$ identidade de A . Se uma extensão f' existe, A é chamado um retracto de X e a aplicação f' uma retração de X em A .

Suponhamos que A seja um retracto de X e g uma retração de X em A . Então para todo espaço Z e toda aplicação

contínua $f:A \rightarrow Z$ existe a extensão $f':X \rightarrow Z$ dada por $f'(x) = f(g(x))$.

3.2 - Seja (X,A) um par triangulável ([2], pg.60). Sa
be-se que (7; pg.7) $L = (X \times 0) \cup (A \times I)$ é um re
tracto de $X \times I$. Em consequência:

a) se $f:X \rightarrow Z$ é uma aplicação contínua, uma homoto-
pia de $f|_A$ pode ser estendida a uma homotopia de
 f .

b) A tem a propriedade da extensão da homotopia em
 X com relação a qualquer espaço Z . Explicítamen-
te, sejam $f_0, f_1:A \rightarrow Z$ e F uma homotopia entre f_0
e f_1 ; se f_0 admite uma extensão f'_0 a X , existe
uma extensão f'_1 de f_1 a X e uma extensão F' de F
a $X \times I$ tal que F' é uma homotopia entre f'_0 e f'_1 .

Portanto, a existência de uma extensão f' depende a
penas da classe de homotopia de f .

Suponhamos, por exemplo, que $f_0:A \rightarrow Z$ é homotópica
a uma aplicação constante; como esta se estende a X , segue-
se que f_0 também se estende a X . Em particular, se Z é con-
traível a um ponto, a contração dá uma homotopia de f_0 a uma
aplicação constante; assim toda aplicação de A em um espaço
contraível Z pode ser estendida a X .

§ 4 - Definições

Para os conceitos que se seguem vide (10), pg 122 a 124 e (12) (1.10, 1.12, 1.33 e 1.34).

Indiquemos com M_p o espaço vetorial tangente a uma variedade diferenciável M , no ponto p .

Sejam M^m e N^n variedades diferenciáveis de dimensões m e n , respectivamente e

$$f: M^m \rightarrow N^n$$

uma aplicação diferenciável. (Para nós significará C^∞ .) Tomemos um sistema de coordenadas $x: U \rightarrow \mathbb{R}^m$, em M^m , em torno de p , e um sistema de coordenadas $y: V \rightarrow \mathbb{R}^n$, em N^n , em torno de $q = f(p)$, de modo que $f(U) \subseteq V$.

A matriz da transformação linear induzida

$$f_p: M_p \rightarrow N_q$$

relativa a esses sistemas de coordenadas é a matriz jacobiana de

$$y \circ f \circ x^{-1}: x(U) \rightarrow y(V)$$

a qual, por simplicidade, chamaremos a matriz jacobiana de f no ponto p .

$f:M^m \rightarrow N^n$ é transversal a $\underline{a}$ se e somente se $\underline{a}$ é um valor regular de f (pois, neste caso, o posto de f_p é igual a $\underline{n}$, isto é, $f_p(M_p) = N_{f(p)}$).

Se $A \subseteq M^m$, uma função $f:A \rightarrow N^n$ é diferenciável, se ela pode ser estendida a uma função diferenciável definida em uma vizinhança U de A .

C A P Í T U L O I

APLICAÇÕES DIFERENCIÁVEIS DE VARIEDADES EM VARIEDADES COM CERTAS ANTE-IMAGENS DADAS

§ 1 - Problema geral

Sejam M e N variedades diferenciáveis, M_1 e N_1 ($i=1,2,\dots,k$) subvariedades disjuntas de M e N , respectivamente, $f_i: M_1 \rightarrow N_1$ aplicações diferenciáveis e sôbre. Em que condições existe uma aplicação diferenciável f de M em N tal que

- a) $f|_{M_1} = f_1$
- b) $f^{-1}(N_1) = M_1$ e
- c) f seja transversalmente regular sôbre cada um dos N_1 ?

O nosso trabalho se restringirá a casos em que $M = S^n$, $N = S^{n-m}$ ($n > m$) (principalmente $n = 3$, $m = 1$) e os N_1 são pontos distintos, a_1 , de S^{n-m} e, então, a condição c) toma a forma

- c') cada a_1 é um valor regular de f .

§ 2 - Observações

1ª.) A superfície esférica S^r , que é o conjunto dos pontos $(x_1, \dots, x_{r+1}) \in \mathbb{R}^{r+1}$ tal que $\sum x_i^2 = 1$, será considerada também como o espaço euclidiano $\mathbb{R}^r$ compactificado em um ponto w , isto é, $S^r = \mathbb{R}^r \cup \{w\}$. A identificação pode ser feita por projeção estereográfica.

2ª.) A inclusão da condição c') é significativa pois o problema da extensão só é interessante quando se trata de construir aplicações diferenciáveis tais que as subvariedades prefixadas sejam imagens inversas de valores regulares. Com efeito, construiremos, abaixo, facilmente, aplicações diferenciáveis $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^2$, para as quais não é satisfeita a condição de serem as subvariedades prefixadas, do $\mathbb{R}^n$, imagens inversas de valores regulares.

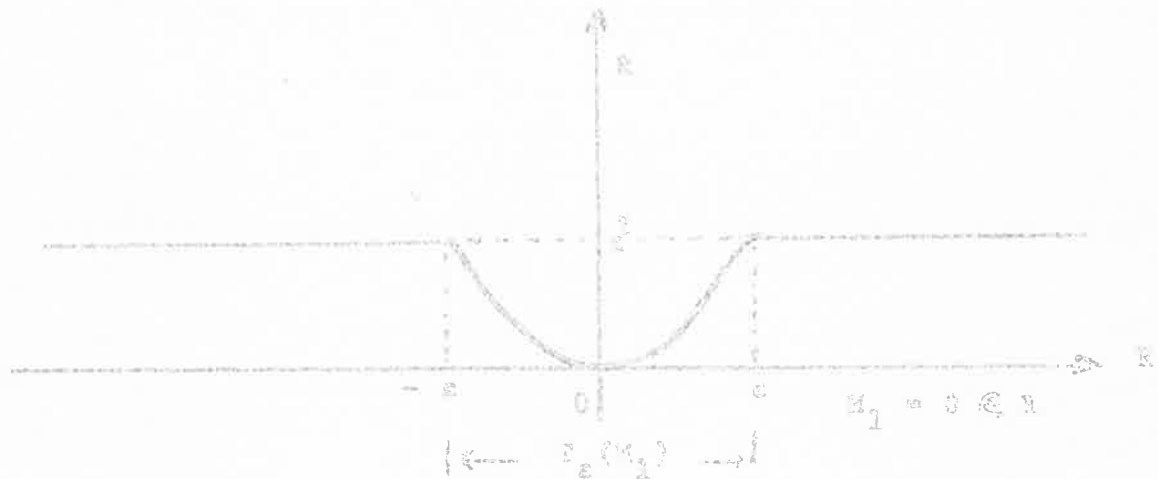
Exemplo a) - Sejam M_1 uma variedade compacta regularmente imersa em $\mathbb{R}^n$ e $\Omega = T_\varepsilon(M_1)$ uma vizinhança tubular aberta de M_1 , de raio ε . Indiquemos com $\rho(P, P_0)$ a distância de um ponto $P \in \bar{\Omega}$ à variedade M_1 , sendo P_0 o pé da perpendicular.

Então a função $\phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\phi(P) = \begin{cases} \rho^2(P, P_0) & \text{se } P \in \bar{\Omega} \\ \varepsilon^2 & \text{se } P \notin \bar{\Omega} \end{cases}$$

é uma função contínua e $\phi|_U$ é uma função diferenciável que toma o valor zero sobre M_1 .

Na figura abaixo temos o gráfico de $\phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ onde $\phi^{-1}(0) = M_1 = 0 \in \mathbb{R}$.



Utilizando o Lema 2.1 de § 5 deste capítulo, é possível substituir a aplicação ϕ por uma δ -aproximação diferenciável.

$$\tilde{\phi}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

tal que $\tilde{\phi}|_{T_{e_1}(M_1)} = \phi|_{T_{e_1}(M_1)}$, onde $e_1 \in U$ e $\phi^{-1}(0) = M_1$,

não sendo, entretanto, 0 $\in \mathbb{R}$ um valor regular de $\tilde{\phi}$.

Exemplo 6) - Sejam, agora, duas variedades compactas

M_1 e M_2 disjuntas, regularmente imersas no $\mathbb{R}^n$. Podemos determinar, então, vizinhanças tubulares disjuntas $T_\epsilon(M_1)$ e $T_\epsilon(M_2)$ e definir uma função contínua $\phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$\phi(P) = \begin{cases} \rho^2(P, P_0) & \text{se } P \in \overline{T_\epsilon(M_1)} \\ 2\epsilon^2 - \rho^2(P, P_0) & \text{se } P \in \overline{T_\epsilon(M_2)} \\ \epsilon^2 & \text{se } P \notin \overline{T_\epsilon(M_1)} \cup \overline{T_\epsilon(M_2)} \end{cases}$$

$\phi|_{T_\epsilon(M_1) \cup T_\epsilon(M_2)}$ é diferenciável e é tal que $\phi^{-1}(0) = M_1$, $\phi^{-1}(2\epsilon^2) = M_2$.

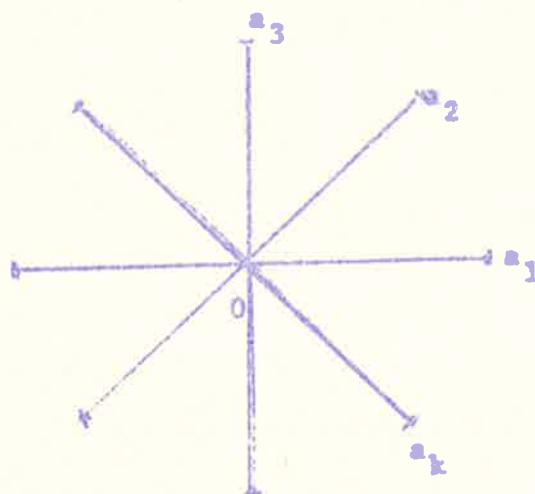
Exemplo c) - Se tivermos k variedades disjuntas compactas, $M_1, \dots, M_k$, regularmente imersas no $\mathbb{R}^n$, podemos obter vizinhanças tubulares $T_\epsilon(M_i)$, duas a duas disjuntas, e podemos definir de maneira análoga ao que fizemos anteriormente, uma aplicação contínua

$$\phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^2$$

de modo que

$$\phi(\overline{T_\epsilon(M_i)}) = \text{segmento } a_i \quad | \text{---} | \quad 0 \in \mathbb{R}^2 \quad (i=1, \dots, k)$$

como mostra a figura abaixo



e de tal maneira que na reunião das vizinhanças tubulares ϕ é diferenciável, $\phi^{-1}(a_1) = M_1$, $\phi(\text{Fr } T_c(M_1)) = 0 \in \mathbb{R}^2$ e $\phi(P) = 0 \in \mathbb{R}^2$ se P não pertence à reunião das vizinhanças tubulares.

Também nos exemplos b) e c) é possível obter uma aplicação diferenciável f , a qual é uma δ -aproximação da ϕ , mas em nenhum caso é satisfeita a condição de serem as subvariedades M_i do $\mathbb{R}^n$ imagens inversas de valores regulares de f .

§ 3 - Problema particular

O problema enunciado no § 1 d'este capítulo, no caso em que M_1^m é uma subvariedade compacta de M^n , $N = S^{n-m}$

$(n > m)$ e $M_1 = a$ um ponto de S^{n-m} toma a seguinte forma:

3.1 - "Sejam M_1^m subvariedade compacta de M^n e a um ponto de S^{n-m} ($n > m$). Existe aplicação diferenciável

$$f: M^n \rightarrow S^{n-m}$$

tal que $f^{-1}(a) = M_1^m$, a valor regular de f ?

Estudaremos o caso em que M^n é também uma variedade compacta.

De acordo com o teorema 4.1 (Apêndice, § 4), existe aplicação diferenciável

$$\phi: \Omega \supset M_1^m \rightarrow S^{n-m} = R^{n-m} \cup \{w\}$$

de um aberto $\Omega = T_c(M_1^m)$, de M^n , em S^{n-m} tal que $\phi^{-1}(a) = M_1^m$ onde a é valor regular de ϕ se e somente se existem $n-m$ campos de vetores normais, diferenciáveis, linearmente independentes, em M_1^m .

A aplicação ϕ é definida como a composta das aplicações:

$$\Omega = T_c(M_1^m) \xrightarrow{\theta} M_1^m \times B_c^{n-m} \xrightarrow{\eta} B_c^{n-m} \xrightarrow{j_1} R^{n-m} \xrightarrow{j_2} S^{n-m} = R^{n-m} \cup \{w\}$$

(vide Apêndice, § 4.1) e, então, $\phi(\Omega)$ é em S^{n-m} uma vizinhança em torno de $a = j_2(0)$, $0 \in \mathbb{R}^{n-m}$, difeomorfa à bola aberta de raio ε em $\mathbb{R}^{n-m}$, vizinhança esta que indicaremos também com B_ε^{n-m} , e todo ponto $x \in B_\varepsilon^{n-m}$ é um valor regular de ϕ .

§ 4 - Extensão da aplicação diferenciável ϕ a uma aplicação contínua $g: M^n \rightarrow S^{n-m}$, M^n variedade compacta

4.1 - TEOREMA: Sejam M_1^m subvariedade compacta de uma variedade compacta M^n e a um ponto de S^{n-m} . Admitamos que exista a aplicação diferenciável

$$\phi: \Omega = T_\varepsilon(M_1^m) \rightarrow S^{n-m} \quad (a \text{ do § 3})$$

onde $\Omega = T_\varepsilon(M_1^m)$ é uma vizinhança tubular de M_1^m em M^n , com $\phi^{-1}(a) = M_1^m$ e a valor regular de ϕ .

Então, existe uma função contínua

$$g: M^n \rightarrow S^{n-m}$$

tal que $g|_{\bar{\Omega}_1} = \phi|_{\bar{\Omega}_1}$, $g^{-1}(a) = M_1^m$ e $g(M^n - \Omega_1) \subset S^{n-m} - B_{\varepsilon_1}^{n-m}$ onde $\Omega_1 = T_{\varepsilon_1}(M_1^m)$ é uma vizinhança tubular aberta, de M_1^m , em

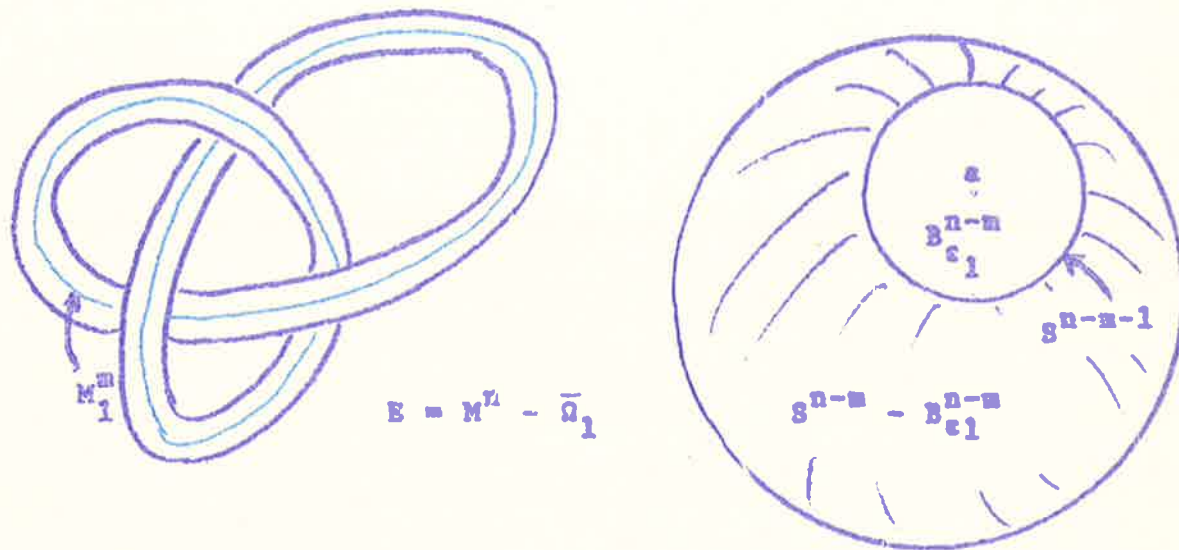
M^n , de amplitude $2\epsilon_1 < 2\epsilon$ e $B_{\epsilon_1}^{n-m}$ é a bola aberta em S^{n-m} , de centro a e raio ϵ_1 .

Demonstração - $\phi|_{\bar{\Omega}_1}$ é uma aplicação diferenciável

$$\phi_1: \bar{\Omega}_1 \supset M_1^m \rightarrow S^{n-m}$$

tal que $\phi_1(\bar{\Omega}_1) = \overline{B_{\epsilon_1}^{n-m}}$, $\phi_1^{-1}(a) = M_1^m$, e a valor regular de ϕ_1 .

A fronteira $\text{Fr } \Omega_1$ da vizinhança tubular é uma superfície $(n-1)$ -dimensional fechada, e $\phi_1(\text{Fr } \Omega_1) = S^{n-m-1}$, fronteira de $B_{\epsilon_1}^{n-m}$.



$M^n - \text{Fr } \Omega_1$ tem duas componentes conexas, Ω_1 e a parte externa $E = M^n - \bar{\Omega}_1$. Além disso, $\bar{E} = E \cup \text{Fr } \Omega_1$ é compacto (subconjunto fechado do compacto M^n) e é variedade com bordo $\text{Fr } \Omega_1$.

Consideremos, então, o par triangulável $(\bar{E}, \text{Fr } \Omega_1)$.

$\text{Fr } \Omega_1$ é subcomplexo de $\bar{E}$ e temos uma aplicação contínua

$$\psi = \phi_1|_{\text{Fr } \Omega_1}: \text{Fr } \Omega_1 \rightarrow S^{n-m-1} \subset S^{n-m} - B_{\epsilon_1}^{n-m}$$

que queremos estender a uma aplicação contínua

$$h: \bar{E} \rightarrow S^{n-m} - B_{\epsilon_1}^{n-m}$$

Mas, esta extensão existe, pois $S^{n-m} - B_{\epsilon_1}^{n-m}$, sendo homeomorfo a uma bola fechada $(n-m)$ -dimensional, tem todos os grupos de homotopia nulos e, portanto, não existe obstrução à extensão de ψ a $\bar{E}$ (9, pg.94).

Com isto obtemos uma aplicação contínua global

$$g: M^n \rightarrow S^{n-m}$$

definida por

$$g(p) = \begin{cases} \phi_1(p) & \text{se } p \in \bar{\Omega}_1 \\ h(p) & \text{se } p \in \bar{E} \end{cases}$$

Observe-se que $M^n = \bar{\Omega}_1 \cup \bar{E}$ e que ϕ_1 e h coincidem na intersecção $\bar{\Omega}_1 \cap \bar{E} = \text{Fr } \Omega_1$; logo g é contínua e, ainda, g é diferenciável em Ω_1 e $g^{-1}(a) = M_1^n$.

§ 5 - Existência de aplicação diferenciável

$f: M^n \rightarrow S^{n-m}$ com $f^{-1}(a) = M_1^n$ e a valor regular de f

Citemos, aqui, um Lema cuja demonstração se encontra em (12), 3.11 e (15), pg.25, o qual usaremos algumas vezes neste trabalho.

3.1 - LEMA: Sejam M_1 e M_2 variedades diferenciáveis e $g: M_1 \rightarrow M_2$ uma aplicação contínua, a qual é diferenciável em um subconjunto fechado A de M_1 (isto significa que g é diferenciável em algum aberto $\Omega \supset A$). Seja $\delta(x)$ uma função positiva contínua em M_1 e denotemos em M_2 a métrica determinada por alguma imersão $M_2 \subset \mathbb{R}^p$. Então existe

$$f: M_1 \rightarrow M_2$$

tal que

- a) f é diferenciável
- b) f é uma δ -aproximação de g
- c) $f|_A = g|_A$

Seja $g:M^n \rightarrow S^{n-m}$ a aplicação do § 4 e consideremos $\Omega_2 = T_{\epsilon_2}(M_1^m)$ uma vizinhança tubular aberta de M_1^m , em M^n , de amplitude $2\epsilon_2 < 2\epsilon_1$. Sendo $\bar{\Omega}_2$ um subconjunto fechado de M^n e $g:M^n \rightarrow S^{n-m}$ uma aplicação contínua que é diferenciável em $\bar{\Omega}_2$, existe, pelo Lema 5.1,

$$f:M^n \rightarrow S^{n-m}$$

tal que

- a) f é diferenciável
- b) f é uma δ -aproximação de g
- c) $f|_{\bar{\Omega}_2} = g|_{\bar{\Omega}_2}$

No nosso caso basta, agora, tomar o número $\delta < \frac{\epsilon_2}{2}$

para que a imagem de $M^n - \bar{\Omega}_2$, pela f , não invada a bola $B_{\epsilon_2/2}^{n-m}$ de centro no ponto a de S^{n-m} ; e de c) segue-se que $f^{-1}(a) = M_1^m$ e a valor regular de f .

§ 6 - Uma condição necessária para a existência de extensão diferenciável

Daremos, neste parágrafo, um resultado bastante importante, o qual constitui uma condição necessária para a existência de extensão diferenciável com as condições impostas em I.1.

6.1 - TEOREMA: Sejam M^m uma variedade compacta, N_1 ($i=1, \dots, k$) subvariedades compactas, disjuntas de M^m , a_i ($i=1, \dots, k$) pontos distintos de uma variedade N^r ($r \leq m$). Se existir aplicação diferenciável $f: M^m \rightarrow N^r$ de M^m em N^r de qual os pontos a_i são valores regulares e $f^{-1}(a_i) = N_i$, então cada ponto a_i admite vizinhança U_i constituída somente de valores regulares.

Demonstração - Chamemos ponto regular de f a todo ponto $p \in M^m$ no qual a matriz jacobiana de f tem característica máxima $r = \min(m, r)$. Então, da continuidade da função determinante, a matriz acima terá característica r também numa vizinhança de p .

N_i , sendo imagen inversa de valor regular, é composta somente de pontos regulares. Mas, da compacidade de N_i e da observação acima, exista certamente uma vizinhança tubular W_{δ_i} , de N_i , composta somente de pontos regulares.

Demonstremos, então, que existe uma célula aberta U_i , vizinhança de a_i tal que $f^{-1}(U_i) \subset W_{\delta_i}$.

Admitamos que não exista vizinhança U_i de a_i composta somente de valores regulares. Então existe uma sequência $\{b_n\}$ de pontos, convergente para a_i , os quais não são valores regulares. Na imagen inversa de cada ponto b_n escolhamos um ponto c_n não pertencente a W_{δ_i} . Como M^m é compacta, a sequência $\{c_n\}$ admite uma subsequência $\{c_{j_n}\}$ conver-

gente, no nosso caso, para um certo ponto p_1 não pertencente a M_1 , isto é,

$$\lim c_{j_n} = p_1 \notin M_1$$

Mas, pela continuidade da f , $f(c_{j_n}) = b_{j_n}$ converge para $f(p_1) = a_1$, o que implica $p_1 \in f^{-1}(a_1) = M_1$, absurdo.

6.2 - COROLÁRIO: Nestas condições, tomando uma bola aberta V_1 , de centro a_1 , $V_1 \subset U_1$, numa conveniente métrica em M^m , $f^{-1}(V_1)$ é um fibrado sobre V_1 , isto é, $f^{-1}(V_1)$ é homeomorfo ao produto cartesiano $f^{-1}(a_1) \times V_1$. Portanto, $f^{-1}(V_1)$ é uma vizinhança tubular de $M_1 = f^{-1}(a_1)$ ((14), Théorème de la Fibration, pg.56 e (15), pg.53).

6.3 - Consequência importante do teorema 6.1 e do Corolário 6.2 é que o processo por nós empregado (§§ 3, 4 e 5) de

1º) entender as funções diferenciáveis

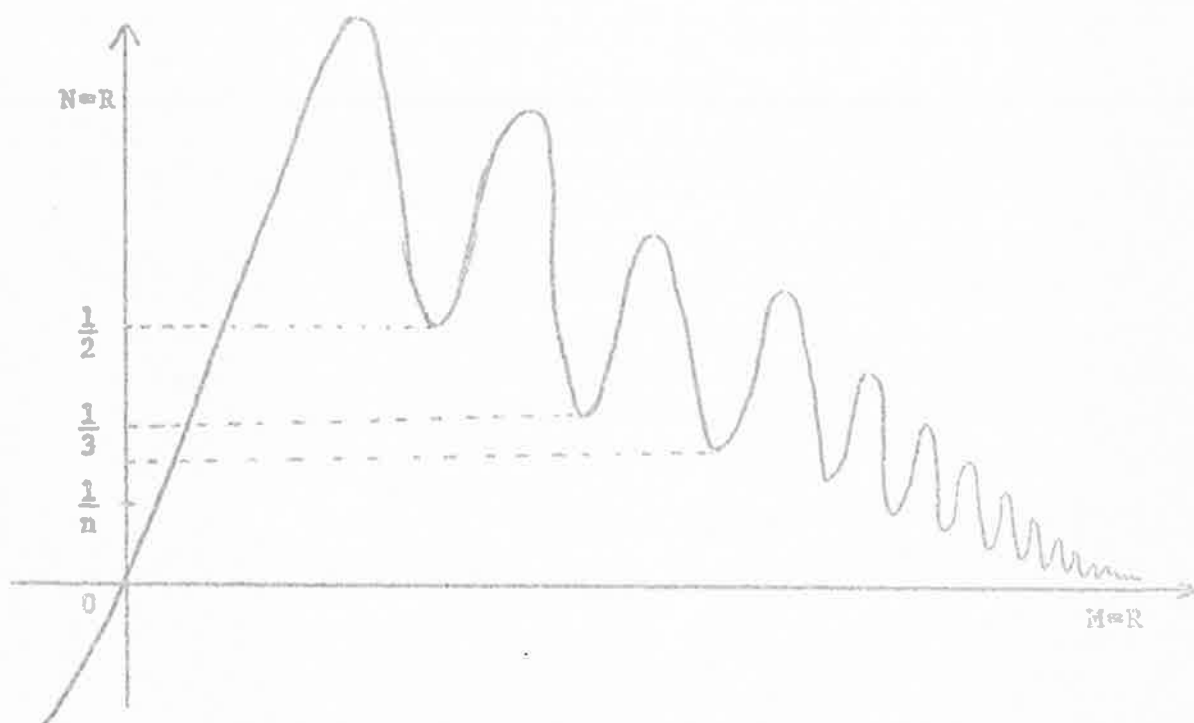
$$f_1: M_1 \rightarrow a_1 \in \mathbb{R}^r$$

a uma aplicação diferenciável ϕ , definida nas vizinhanças tubulares dos M_1 , da qual os pontos a_1 são valores regulares e

2º) depois estender a ϕ ao espaço restante de modo que a imagem dêste pela ϕ não invada as vizinhanças V_1 dos a_1 , é o único possível.

6.4 - OBSERVAÇÃO: O Teorema 6.1 não é verdadeiro se M^n não é uma variedade compacta.

Por exemplo, se tivermos $M = \mathbb{R}$, $N = \mathbb{R}$, $a_1 = 0$, para uma função diferenciável $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, negativa para $x < 0$, $f(0) = 0$, positiva para $x > 0$, com derivada positiva no ponto $x = 0$, e que tem os números reais $\frac{1}{n}$ como valores mínimos, conforme mostra o gráfico abaixo, o número real $a_1 = 0$ é um valor regular de f , pois aí o gráfico é transversal. Mas, neste exemplo, $a_1 = 0$ não possui uma vizinhança constituída só de valores regulares, pois é ponto de acumulação de valores críticos (os valores mínimos $\frac{1}{n}$).



C A P Í T U L O I I

APLICAÇÕES DE S^3 EM S^2

Mostraremos neste capítulo que, dado um número finito de pontos distintos a_i ($i=1, \dots, k$) de S^2 , existe aplicação diferenciável

$$f: S^3 \rightarrow S^2$$

tal que a imagem inversa de cada ponto a_i seja constituída de uma reunião de circunferências planas prefixadas γ_{ij} ($j=1, \dots, n_i$), duas a duas "separadas", regularmente imersas em S^3 , sendo os pontos a_i valores regulares de f . Se $i=j=1$, $\gamma_1 = f^{-1}(a_1)$ é um nó arbitrário, trivial ou não (Apêndice, § 2.3), regularmente imerso em S^3 .

NOTA - Daqui em diante, por nós γ_j ($j=1, \dots, k$) "separados" devemos entender que existem, em S^3 , bolas 3-dimensionais $B_1^3, \dots, B_k^3$, disjuntas, contendo no seu interior $\gamma_1, \dots, \gamma_k$, respectivamente.

§ 1 - Primeiro caso

1.1 - TEOREMA: Dado um nó γ_1 regularmente inserido em S^3 (trivial ou não), existe aplicação diferenciável

$$f: S^3 \rightarrow S^2$$

tal que $f^{-1}(a) = \gamma_1$, sendo o ponto $a \in S^2$ valor regular de f .

Demonstração - De acordo com o que vimos no Capítulo I, §§ 3, 4, 5 e 6, dada uma subvariedade compacta M_1^m de S^n e um ponto a de S^{n-m} , existe uma aplicação diferenciável

$$f: S^n \rightarrow S^{n-m}$$

com $f^{-1}(a) = M_1^m$ e a valor regular de f se e somente se existem $n-m$ campos de vetores normais, diferenciáveis, linearmente independentes em M_1^m .

Ora, no caso particular de $n = 3$ e $m = 1$, existem sempre $n-m = 2$ campos de vetores normais, diferenciáveis, linearmente independentes em γ_1 , com o que fica demonstrado o teorema.

§ 2 - Segundo caso

Existência de $f: S^3 \rightarrow S^2$ diferenciável, tal que as imagens inversas de dois pontos distintos a_1 e a_2 de S^2 sejam, respectivamente, duas circunferências prefixadas γ_1 e γ_2 (bordos de discos planos) separadas, e sendo a_1 e a_2 valores regulares de f .

2.0 - Preliminares

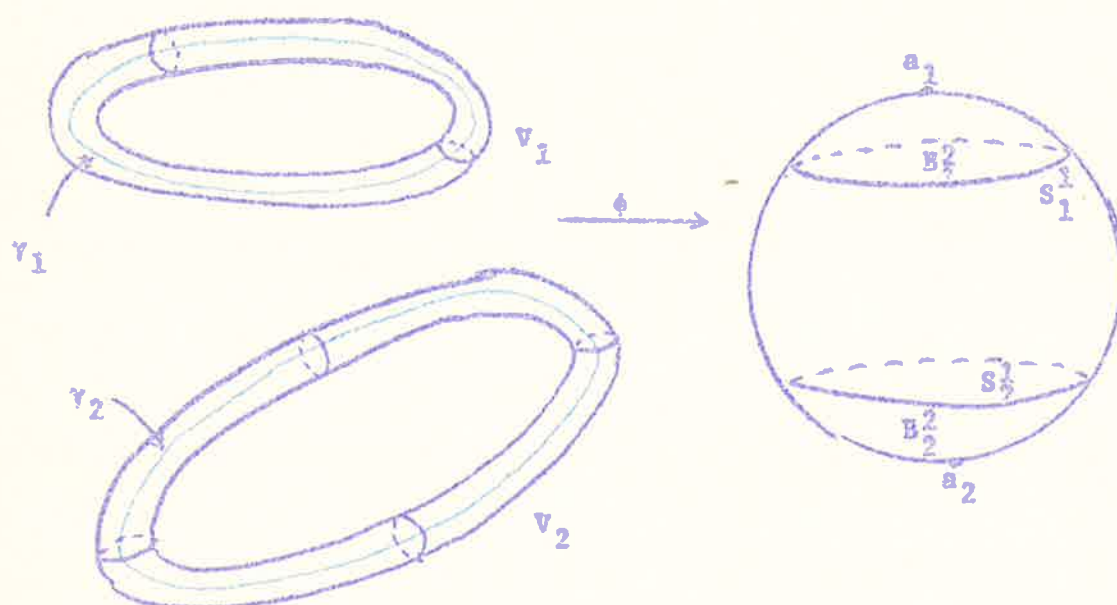
Sendo γ_1 e γ_2 separadas, existe uma distância positiva entre elas e podemos, então, determinar vizinhanças tubulares fechadas V_1 e V_2 de γ_1 e γ_2 , respectivamente, também disjuntas entre si e aplicações diferenciáveis (Cap. I, § 3)

$$\phi_i: V_i \rightarrow S^2 \quad (i=1,2)$$

tais que $\phi_i(V_i) = B^2(\epsilon_i, \epsilon_i) = B_i^2$ "disco" fechado, em S^2 , de centro a_i e raio ϵ_i e, indicando com $T_i = \text{Fr}(V_i)$, $\phi_i(T_i) = S_i^1$ a circunferência fronteira de B_i^2 , e $\phi_i^{-1}(a_i) = \gamma_i$, sendo a_i valor regular de ϕ_i .

Indiquemos com

$$V = V_1 \cup V_2, \quad M = \overline{S^3 - V}, \quad T = T_1 \cup T_2 = M \cap V$$



Juntas, as ϕ_i , definem uma aplicação diferenciável

$$\phi: V \rightarrow S^2$$

tal que $\phi(V) = B = B_1^2 \cup B_2^2$, $\phi(T) = S = S_1^1 \cup S_2^1$ e $\phi^{-1}(a_1) = \gamma_1$, sendo os pontos $a_1 \in S^2$ valores regulares de ϕ .

Mostraremos abaixo no item 2.2 deste parágrafo, que a aplicação diferenciável $\phi: V \rightarrow S^2$ se estende a uma aplicação contínua $g: S^3 \rightarrow S^2$ e, pelo que vimos em 1.5, existe $f: S^3 \rightarrow S^2$ diferenciável, a qual é uma extensão de ϕ e uma δ -aproximação de g .

Antes de tudo, no item 2.1, abaixo, daremos um resultado importante.

2.1 - TEOREMA: O problema da extensão ao S^3 da aplicação diferenciável $\phi: V \rightarrow S^2$, deste parágrafo, é essencialmente equivalente ao da extensão a uma bola fechada que contenha V_1 e V_2 no seu interior.

Com efeito, sendo V_1 e V_2 compactos, existe α suficientemente grande tal que $V = V_1 \cup V_2 \subset B_\alpha^3$, bola aberta de centro na origem, raio α e fronteira S_α^2 .

Admitamos que a aplicação diferenciável $\phi: V \subset S^3 \rightarrow S^2$ se estenda a uma aplicação contínua $h: \overline{B_\alpha^3} \rightarrow S^2$ nas condições do nosso problema, isto é, tal que

$$h(\overline{B_\alpha^3} - V) \subset S^2 - \{B_1^2 \cup B_2^2\}.$$

Como $S^2 - \{B_1^2 \cup B_2^2\}$ é homeomorfo ao cilindro $S^1 \times I$,

$$\pi_2(S^2 - \{B_1^2 \cup B_2^2\}) = \pi_2(S^1 \times I) = 0.$$

Logo, $h|_{S_\alpha^2}$ é homotópica a zero em $S^2 - \{B_1^2 \cup B_2^2\}$ e, sendo S_α^2 fronteira também da bola $S^3 - B_\alpha^3$, $h|_{S_\alpha^2}$ se estende a $S^3 - B_\alpha^3$, com imagem em $S^2 - \{B_1^2 \cup B_2^2\}$.

Existe, portanto, $g: S^3 \rightarrow S^2$ contínua, tal que

$g|_{\overline{B_\alpha^3}} = h$ e $g(S^3 - V) \subset S^2 - \{B_1^2 \cup B_2^2\}$. É claro, então, que $\gamma_1 = h^{-1}(a_1) = g^{-1}(a_1)$. A recíproca é óbvia.

2.2 - Extensão da aplicação diferenciável $\phi: V \rightarrow S^2$

(vide II, 2.0) a uma aplicação contínua

$$g: S^3 \rightarrow S^2 \text{ tal que } g(S^3 - V) \subset S^2 - B$$

Consideremos as circunferências

$$S_i^1 = \phi_i(T_i) \quad (i=1,2)$$

como imagens em S^2 (vide fig. em II, 2.0) de curvas parametrizadas

$$C_i: I \rightarrow S^2 \quad (\text{seja } 0 \leq t \leq 1 \text{ o parâmetro})$$

Como as γ_i são circunferências planas, as vizinhanças tubulares V_i são toros de rotação, de alma γ_i , e as "projeções" $\phi_i: V_i \rightarrow S^2$ definidas no Cap. I, § 3.1, são tais que as fibras

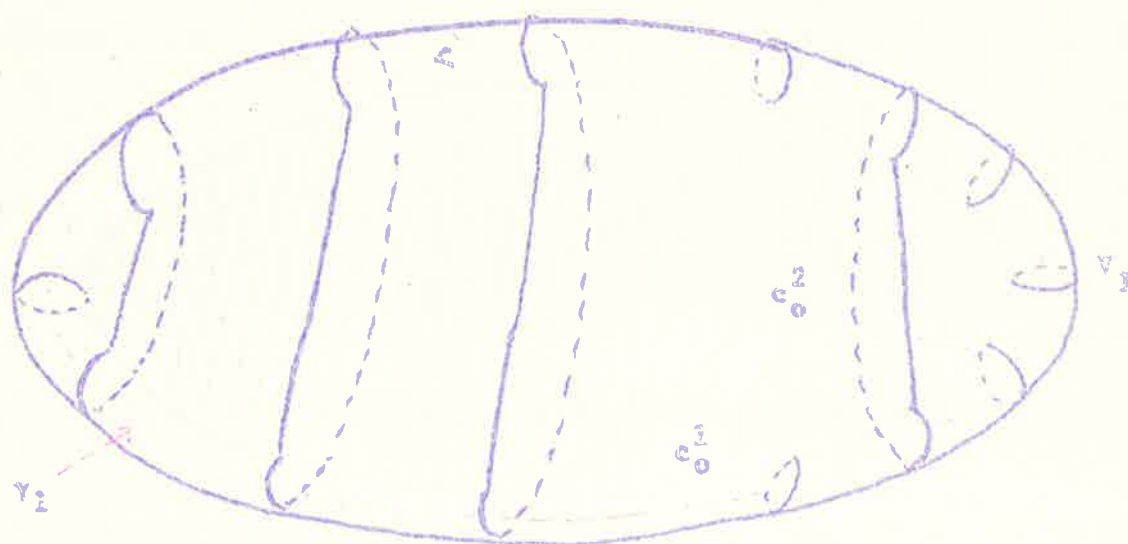
$$\phi^{-1}(C_i(t)) = \alpha_t^i \quad (0 \leq t \leq 1)$$

são circunferências sobre T_i , disjuntas, homólogas a γ_i e tais que

$$\bigcup \alpha_t^i = T_i \quad (i=1,2)$$

Indiquemos com D_1^2 o disco plano de bordo γ_1 , façamos $C_1(t) = P_t$ e $C_2(t) = Q_t$ e podemos supor $c_0^1 = D_1^2 \cap \tau_1 = c_0^1 = \phi^{-1}(P_0)$ e $d_0^1 = D_2^2 \cap \tau_2 = c_0^2 = \phi^{-1}(Q_0)$.

Denotemos, ainda, com c_0^2 e d_0^2 os discos planos, contidos em $H = S^3 - (V_1 \cup V_2)$, cujas fronteiras são c_0^1 e d_0^1 , respectivamente.

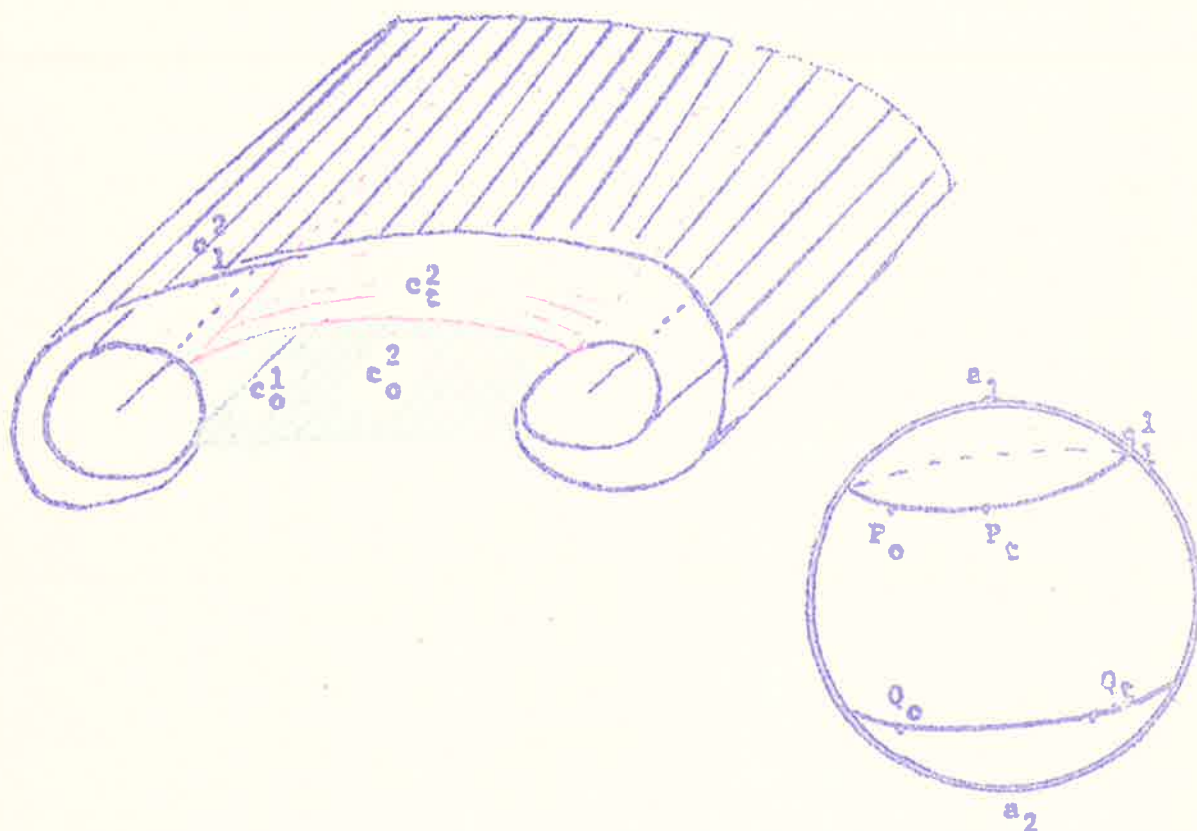


Consideremos, para cada t , superfícies de rotação c_t^2 superpostas uma à outra, a partir de c_0^2 , e de bordo $c_t^1 = \phi_1^{-1}(P_t)$, conforme mostra a figura abaixo.

A reunião destas superfícies com a vizinhança tubular V_1 será um sólido W_1 de superfície $c_0^2 \cup c_1^2$.

Definindo

$$g(c_t^2) = P_t$$



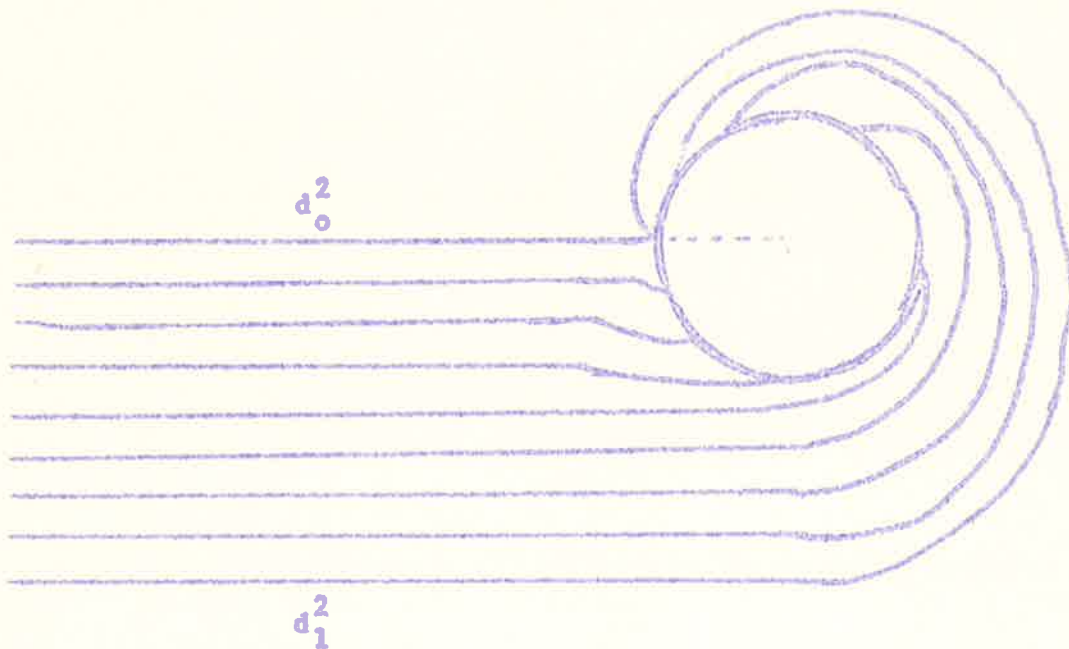
tôda a superfície $c_0^2 \cup c_1^2$ do sólido W_1 vai pela aplicação g em $p_0 \in s_1^1$.

Com a superfície d_0^2 de bordo d_0^1 podemos fazer uma construção análoga: consideramos superfícies d_t^2 superpostas, uma à outra, para cada t , a partir de d_0^2 , e de bordo $d_t^1 = \phi_2^{-1}(Q_t)$. As superfícies d_t^2 podem ser tomadas sempre disjuntas das c_t^2 . A reunião destas superfícies com a vizinhança tubular V_2 será um sólido W_2 de fronteira $d_0^2 \cup d_1^2$, e será $W_2 \cap W_1 = \emptyset$. Definindo, também,

$$g(d_t^2) = Q_t$$

tôda a superfície $d_0^2 \cup d_1^2$ do sólido W_2 vai pela g em $Q_0 \in s_2^1$.

A figura abaixo mostra uma secção transversal de um trecho de W_2 .



As circunferências γ_1 e γ_2 podem ser consideradas suficientemente afastadas de modo que podemos tomar duas bolas abertas B_1^3 e B_2^3 , cujos fechos $\overline{B_1^3}$ e $\overline{B_2^3}$ são disjuntos, contendo no seu interior W_1 e W_2 , respectivamente, e definir

$$g(\overline{B_1^3} - W_1) = P_0 \quad \text{e} \quad g(\overline{B_2^3} - W_2) = Q_0$$

Por outro lado, $S^3 - (B_1^3 \cup B_2^3)$ é homeomorfo a $S^2 \times I$, I = intervalo $0 \leq s \leq 1$, por um homeomorfismo θ tal que

$$\theta(\text{Fr } B_1^3) = S^2 \approx 0 \quad \text{e} \quad \theta(\text{Fr } B_2^3) = S^2 \approx 1$$

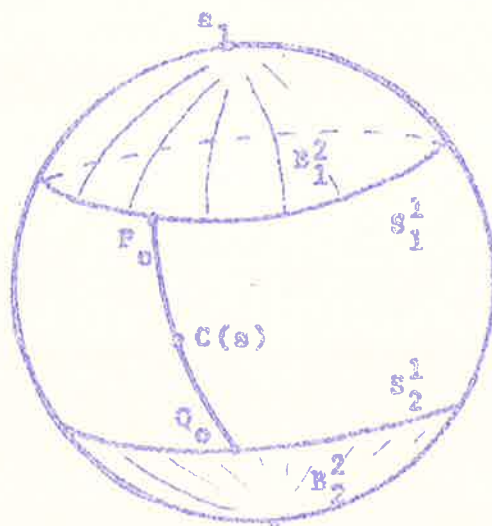
Considerando um arco regular

$$C: I \rightarrow S^2 = (B_1^2 \cup B_2^2)$$

de extremos P_0 e Q_0 , definamos

$$g(a) = C(\pi_2 \theta(a)) \quad , \quad a \in S^3 - (B_1^3 \cup B_2^3)$$

onde $\pi_2: S^2 \approx I \rightarrow I$ é a projeção sobre o 2º fator.



Temos, portanto, construído uma aplicação contínua

$$g: S^3 \rightarrow S^2$$

tal que $g|V = \phi$ diferenciável, $g^{-1}(a_i) = \gamma_i$, $g(W_1 - \overset{0}{V}_1) = S_2^1$ e $g(\text{Fr } W_1) = P_0 \in S_1^1$, $g(W_2 - \overset{0}{V}_2) = S_2^1$ e $g(\text{Fr } W_2) = Q_0 \in S_2^1$, $g(\overline{B}_1^3 - W_1) = P_0$, $g(\overline{B}_2^3 - W_2) = Q_0$ e leva $S^3 - (B_1^3 \cup B_2^3)$ sobre um arco regular $\overbrace{P_0}^{Q_0} \subset S^2 - (B_1^2 \cup B_2^2)$.

2.3 - TEOREMA: Dadas duas circunferências γ_1 e γ_2 , separadas, em S^3 , e dados dois pontos distintos a_1 e a_2 de S^2 , existe aplicação diferenciável

$$f: S^3 \rightarrow S^2$$

tal que $f^{-1}(a_i) = \gamma_i$ ($i=1,2$) e a_i é valor regular de f .

Demonstração - Vimos em 2.2. que existe aplicação contínua

$$g: S^3 \rightarrow S^2$$

que restrita ao subconjunto fechado $V = V_1 \cup V_2$ é diferenciável, $g^{-1}(a_i) = \gamma_i$ ($i=1,2$) com a_i valor regular de $\phi = g|V$.

Consideremos vizinhanças tubulares fechadas V'_1 de γ_1 de amplitude menor do que as de V_1 .

Então, de acordo com o Lema 5.1, Cap. I, existe

$$f: S^3 \rightarrow S^2$$

diferenciável, a qual é uma extensão de $g|_{V'} = \gamma_1' \cup \gamma_2'$ e uma δ -aproximação de g .

Sejam r_1' e r_2' os raios dos discos fechados $g(V_1')$ e $g(V_2')$, em S^2 , basta tomar $\delta < \min(r_1'/2, r_2'/2)$ que teremos $x^{-1}(a_i) = \gamma_i$ e são os pontos a_i ($i=1,2$) valores regulares de f .

2.4 - OBSERVAÇÃO: Poderíamos ter definido a aplicação contínua

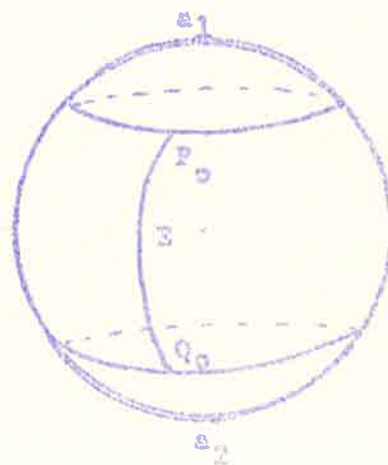
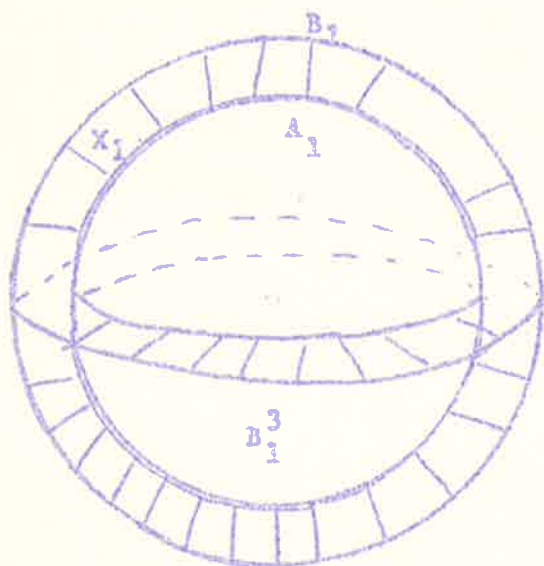
$$g: S^3 \rightarrow S^2$$

vista em 2.2., alterando-a sobre $S^3 - (B_1^3 \cup B_2^3)$ da seguinte maneira:

podemos determinar vizinhanças tubulares fechadas, $\overline{U}_1$ e $\overline{U}_2$, das superfícies $\text{Fr } B_1^3$ e $\text{Fr } B_2^3$, respectivamente, de amplitude 2ϵ suficientemente pequena de modo que $\overline{U}_1 \cap \overline{U}_2 = \emptyset$; indiquemos com X_i ($i=1,2$) a região de $\overline{U}_i$ que não pertence ao interior de B_i^3 . Portanto, X_i é reunião de segmentos $A_i B_i$ (A_i percorrendo $\text{Fr } B_i^3$) disjuntos, normais a $\text{Fr } B_i^3$.

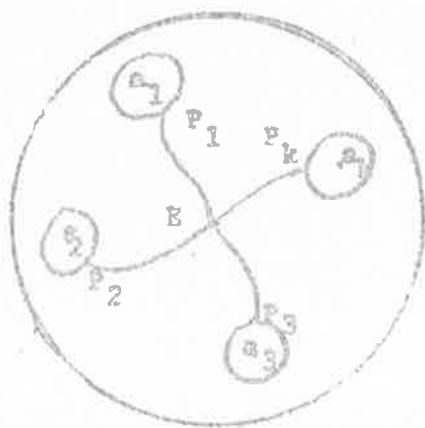
Consideremos um arco regular $P_0 \overset{\curvearrowright}{Q_0} \subset S^2 - (B_1^3 \cup B_2^3)$ e seja E um ponto deste arco distinto dos extremos. Então obtemos uma aplicação contínua g definindo-a de modo a levar cada segmento $A_1 B_1$ homeomorficamente sobre o arco $P_0 E$ e cada segmento $A_2 B_2$ homeomorficamente sobre o arco $Q_0 E$. Para-

do $U_1 = K_1^3 \cup X_1$, a $\text{Fr } U_1$ é levada ao ponto E . Basta então E_2 ser, agora, $g(S^3 - (U_1 \cup U_2)) = \text{ponto } E$.



2-5 - Observação: A construção feita em II, 2.4 acima, é válida também no caso em que se deseja que cada $M_i = f^{-1}(a_i)$ ($i=1,2,\dots,k$) seja constituída de um número finito de circunferências γ_{ij} ($j=1,\dots,r_i$) imersas na S^3 , mutuamente separadas. Definimos, de modo análogo

go as que fizemos no item anterior, as aplicações contínuas $g_i: U_i \rightarrow S^2$, onde cada U_i é, agora, uma reunião disjunta de um número finito de sólidos $U_{ij} = Z_{ij}^3 \cup X_{ij}$. Assim cada g_i leva os correspondentes X_{ij} no arco $P_i \in S^2 = (Z_1^2 \cup \dots \cup Z_k^2)$ levando as $Fr U_{ij}$ e, em consequência, $Fr U_i$ no ponto E .



A aplicação constante

$$S^3 = \{U_1 \cup \dots \cup U_k\} \rightarrow \text{ponto } E$$

junto com as aplicações g_i define uma aplicação contínua

$$g: S^3 \rightarrow S^2$$

tal que restrita ao subconjunto fechado $V = V_1 \cup \dots \cup V_k$ é diferenciável.

C A P Í T U L O I I I

A OPERAÇÃO DESVIO

O objetivo dêste capítulo é mostrar que se dá origem a uma aplicação diferenciável

$$f': S^3 \rightarrow S^2$$

tal que as imagens inversas de dois pontos distintos, a_1 e a_2 , de S^2 , sejam dois nós dados γ_i' (triviais ou não), disjuntos, regularmente imersos em S^3 , e com um número de entrelaçamento qualquer, e sendo a_i ($i=1,2$) valor regular de f' , então, a partir de f' , podemos construir uma outra aplicação diferenciável

$$f: S^3 \rightarrow S^2$$

tal que as imagens inversas de a_1 e a_2 sejam dois nós γ_i regularmente imersos em S^3 , obtidos de γ_i' desviando, de um ângulo, um pequeno trecho de modo que o número de entrelaçamento aumente ou diminua de uma unidade, e sendo também a_i ($i=1,2$) valor regular de f .

§ 1 - Preliminares

Vimos no Cap. I, § 6, que f' é necessariamente extensão de uma aplicação diferenciável

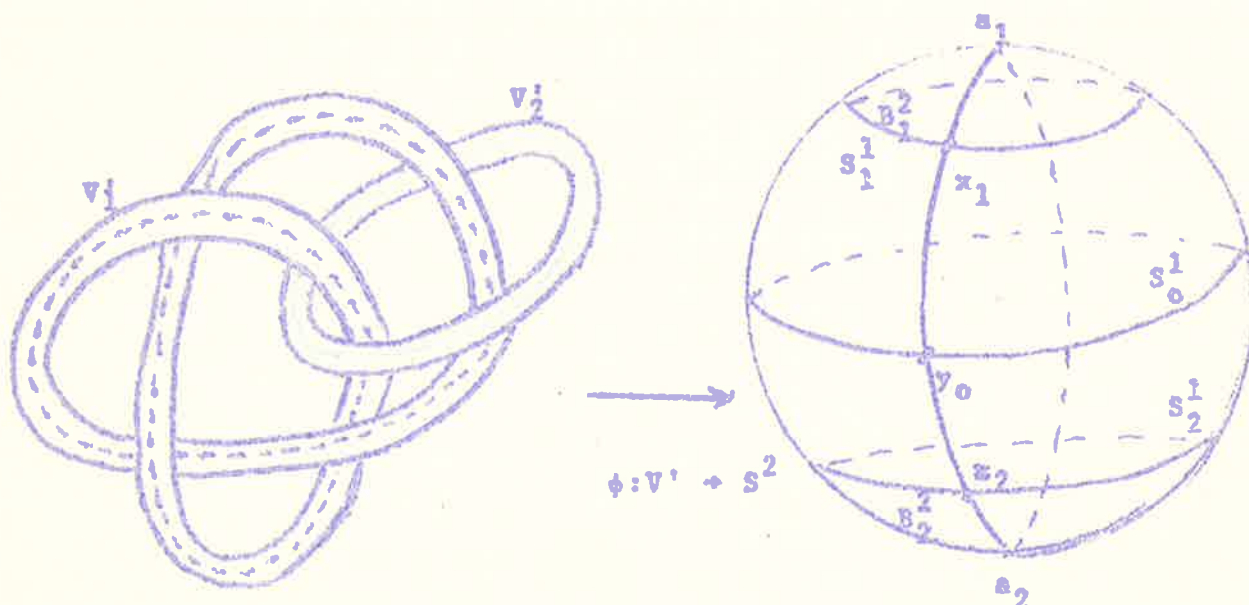
$$\phi: V'_1 \cup V'_2 \rightarrow B_1^2 \cup B_2^2 \subset S^2$$

onde V'_i ($i=1,2$) é uma vizinhança tubular fechada de γ_i^1 , a qual é uma "projeção" de V'_i , difeomorfa ao produto cartesiano $B_i^2 \times \gamma_i^1$, sobre uma vizinhança B_i^2 de a_i , em S^2 , composta somente de valores regulares.

$$\text{Sejam } V' = V'_1 \cup V'_2, \quad M = \overline{S^3 - V'}$$

$$B = B_1^2 \cup B_2^2, \quad S_1^1 = \text{Fr } B_1^2, \quad S_2^1 = \text{Fr } B_2^2,$$

$$S = S_1^1 \cup S_2^1 \quad \text{e} \quad \tilde{T}_i = \text{Fr } V'_i \quad (i=1,2)$$



Podemos supor a_1 e a_2 polos de S^2 , e sejam x_1, x_2 e y_0 as intersecções de um círculo máximo, pelos polos de S^2 , com S_1^1 , S_2^1 e o equador S_0^1 , respectivamente.

Sejam L_1 e L_2 as fibras $\phi^{-1}(x_1)$ e $\phi^{-1}(x_2)$, respectivamente.

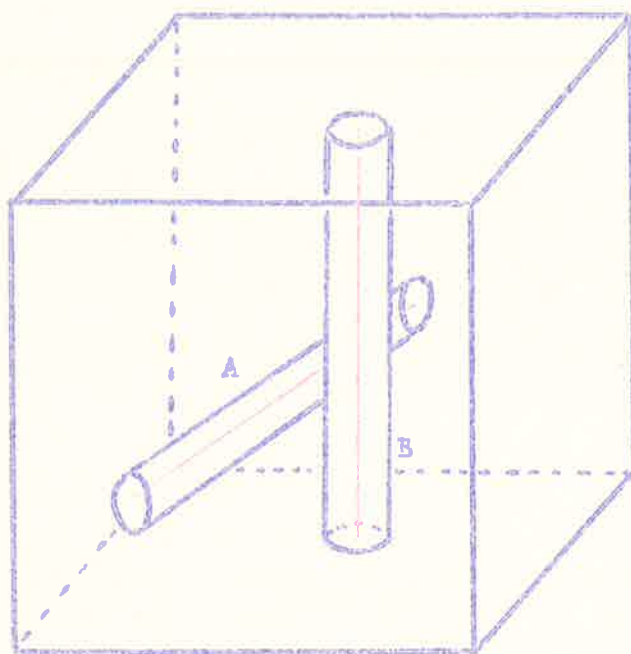
Seja $\theta: S^2 \rightarrow S^2$ uma aplicação contínua que leva S_1^2 e S_2^2 homeomorficamente sobre os hemisférios norte e sul, respectivamente, "esticando" o arco $a_1 x_1$ sobre $a_1 y_0$ e o arco $a_2 x_2$ sobre $a_2 y_0$.

A composta $f_0 = \theta f': S^3 \rightarrow S^2$ é uma aplicação contínua que é diferenciável no interior de V' , e $f_0^{-1}(a_i) = \gamma_i'$ ($i=1,2$) e a_i são ainda valores regulares de f_0 .

A imagem inversa $f_0^{-1}(y_0)$ será a união $L_1 \cup L_2 \cup S_0$, em de E , eventualmente vazio, é um subconjunto de $M = S^3 - V'$.

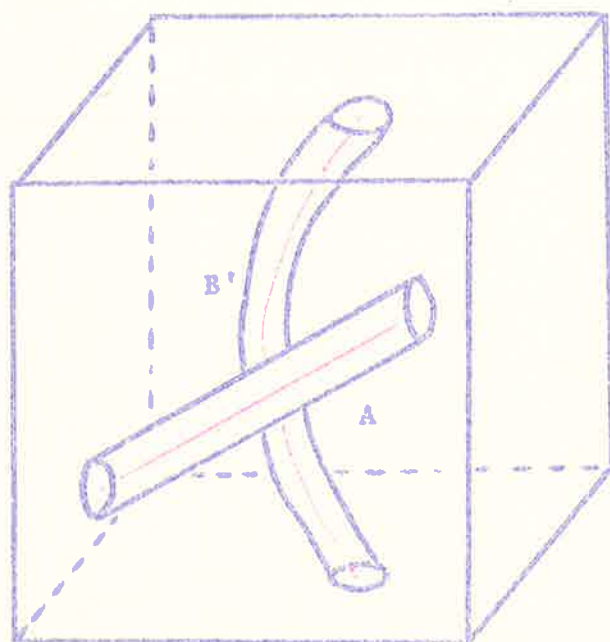
§ 2 - O problema do "desvio"

Podemos considerar, sem perda de generalidade, que os nós γ_1' e γ_2' (seja c o nº de entrelaçamento deles) e as vizinhanças tubulares fechadas, V_1' e V_2' , tenham um trecho A do primeiro e um trecho B do segundo suficientemente próximos, de modo que apenas estes trechos estejam contidos no interior de um pequeno cubo C.



Configuração (I₁)

Consideremos, agora, a configuração seguinte, obtida da anterior eliminando o trecho B do tubo V_2' e construindo um análogo B' do outro lado de A, de modo que $B' \cap Fr C = B \cap Fr C$ e os novos nós agora obtidos, γ_1 , tenham um número de entrelaçamento $c \pm 1$



Configuração (II)

Pergunta-se: existe $g: C \rightarrow S^2$ contínua, tal que

- a) $g|_{Fr C} = f_0|_{Fr C}$
- b) $g|_{A \cup B'}$ diferenciável
- c) juntando g com a função f_0 definida fora do cubo obtém-se uma aplicação contínua a qual pode ser aproximada por uma aplicação diferenciável $f: S^3 \rightarrow S^2$ de modo que $f^{-1}(a_i) = \gamma_i$ e a_i ($i=1,2$) valor regular de f ?

No restante d'êste Capítulo mostraremos que a resposta é afirmativa, fazendo algumas modificações da função, que reduzem o problema a uma construção geométrica elementar.

§ 3 - Transformações de S^3 em S^3 que modificam a posição relativa de V_1' e V_2' e retificam trechos de L_1 e L_2

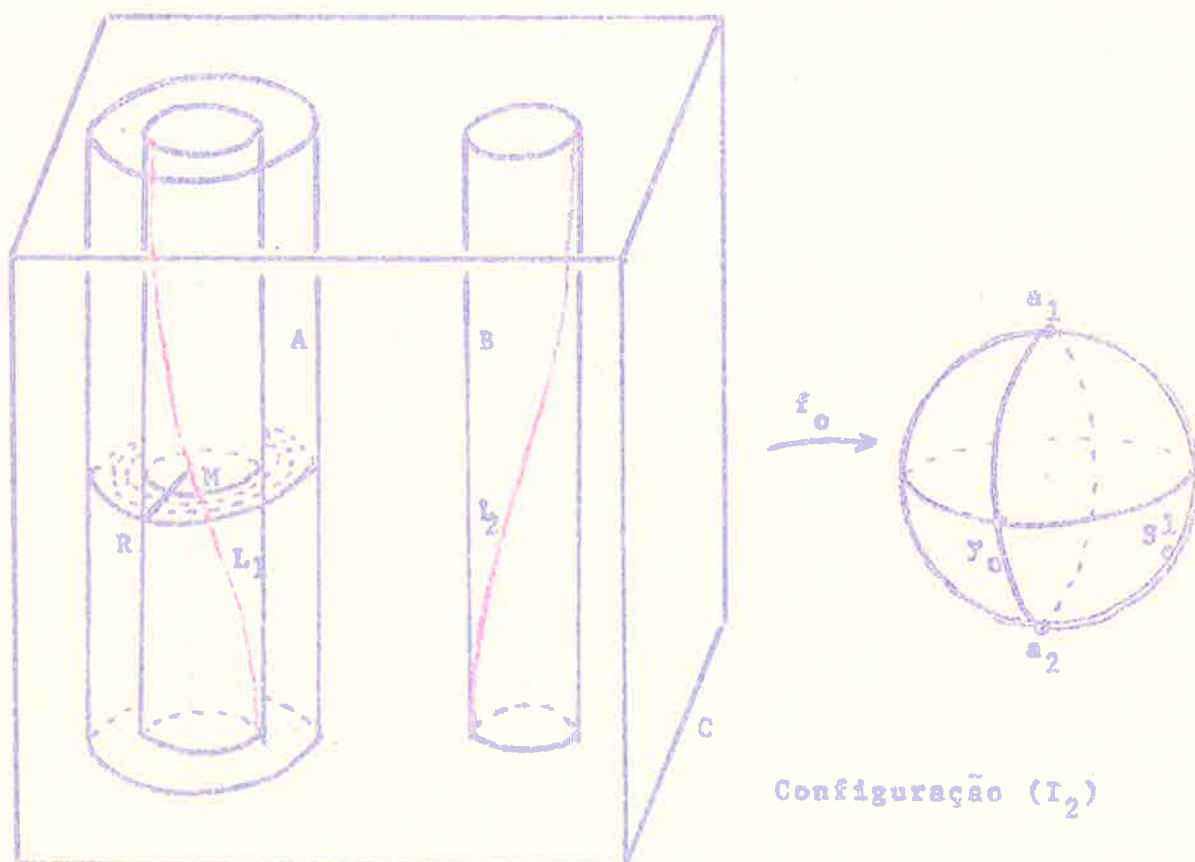
Vamos supor que os trechos das curvas γ_1' e γ_2' , sobre os quais vamos trabalhar de agora em diante, sejam retilíneos e paralelos, e os trechos A e B, das vizinhanças tubulares V_1' e V_2' , sejam cilindros circulares retos, e o cubo C contenha somente êstes trechos das vizinhanças tubulares. Suponhamos, ainda, que o cubo tenha arestas paralelas aos trechos de γ_1' , o que é possível sem perda de generalidade, pois no Capítulo IV mostraremos que necessitamos o problema "do desvio" somente nesta situação.

Admitamos, ainda, que a aplicação

$$f': S^3 \rightarrow S^2$$

citada na introdução dâste capítulo, já se aplica nesta condi
ções.

Podemos sempre admitir nas nossas construções, que o ponto P_∞ com o qual fazemos a compactificação de R^3 para obter S^3 , não seja atingido. Trabalharemos, então, de agora em diante com a métrica de R^3 e, por abuso de linguagem, designaremos com a palavra cubo qualquer paralelepípedo reto retângulo.

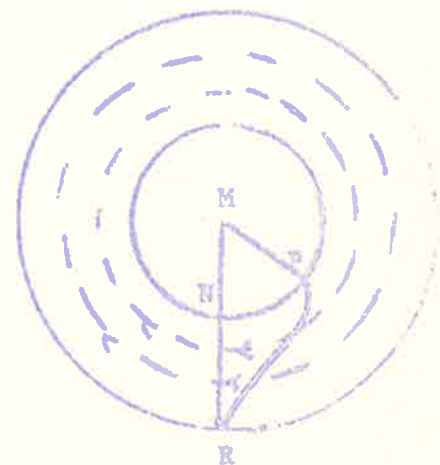
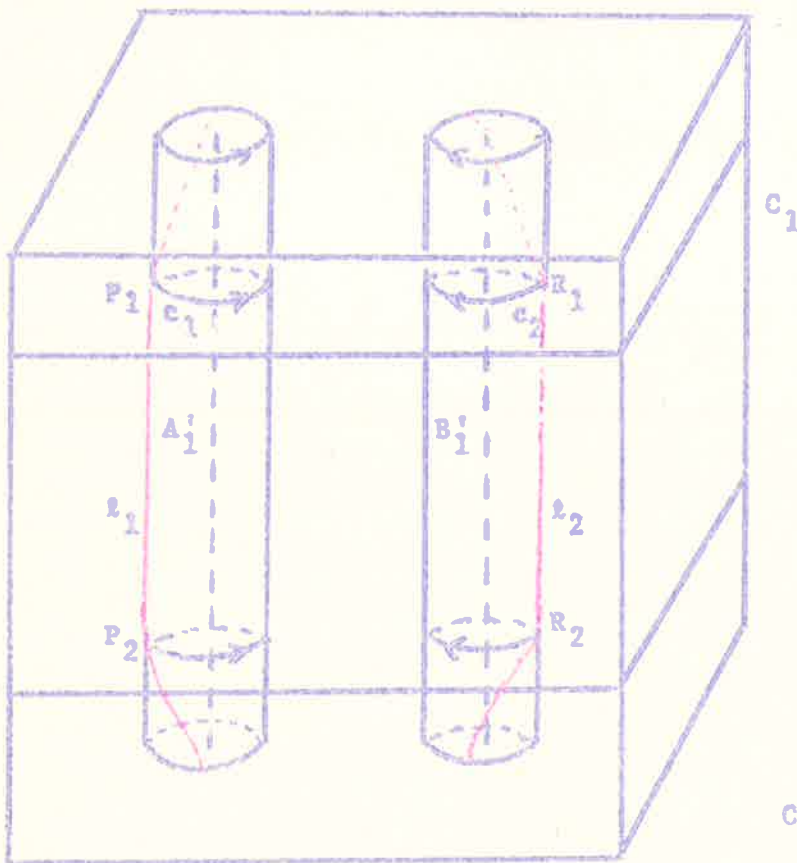


Temos, então, $f_0(L_1 \cap C) = f_0(L_2 \cap C) = \gamma_0 \in S_0^1 \subset S^2$.
As linhas em cor vermelha, na figura acima, são $L_1 \cap C$ e $L_2 \cap C$.

Construiremos, agora, um difeomorfismo

$$\psi: S^3 \rightarrow S^3$$

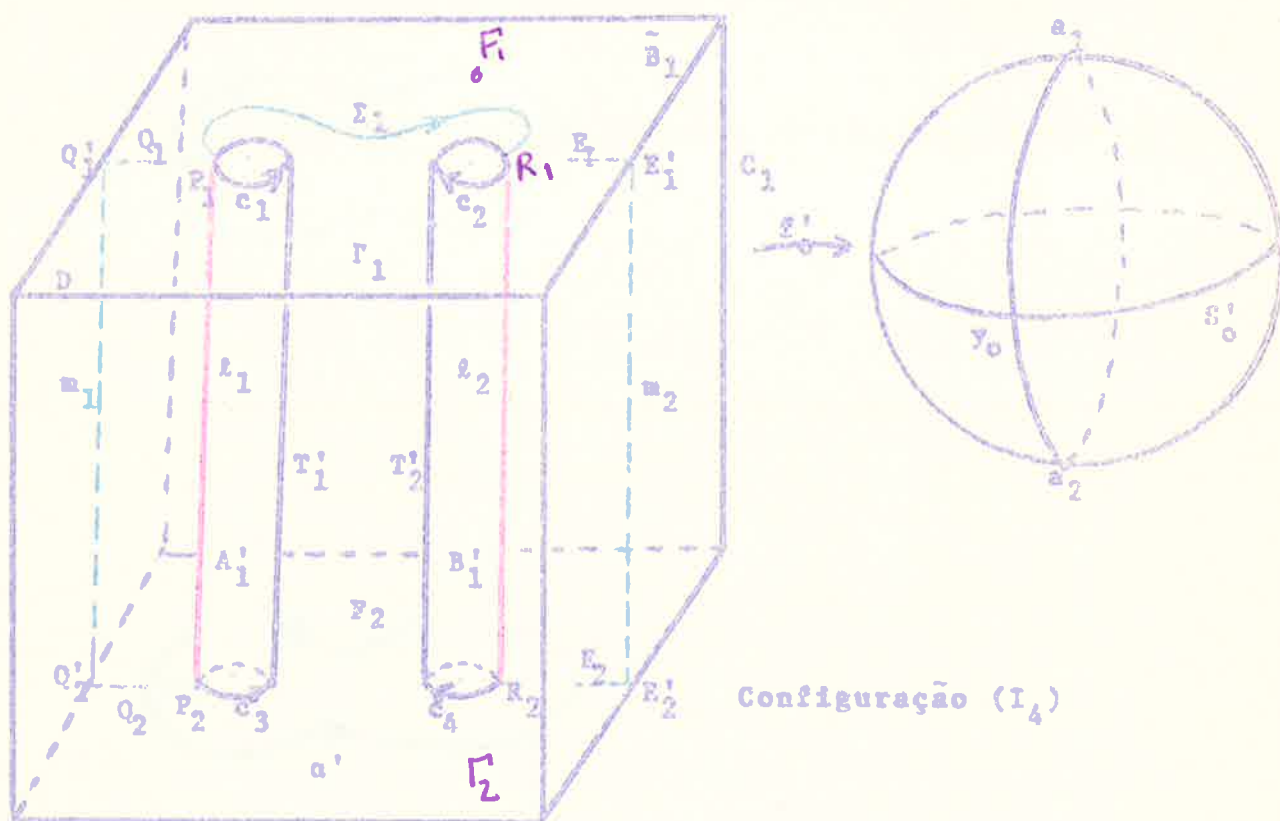
o qual, restrito ao cubo C efetua uma torção nos cilindros A e B de modo que $L_1 \cap C$ e $L_2 \cap C$ se tornem em parte retilíneas conforme indica a figura abaixo.



Configuração (I₃)

Daremos no Apêndice, § 5, uma descrição do difeomorfismo ψ . A torção provocada por ψ nos cilindros A e B vai se abrindo de dentro para fora, de modo que fora de um determinado cilindro A' (e B') concêntrico a A (e B), $A' \supset A$ (e $B' \supset B$), e na fronteira do cubo C se tenha $\psi = \text{identidade}$.

Seja C_1 a parte do cubo C nos quais os trechos ℓ_1 e ℓ_2 de $\psi(L_1 \cap C)$ e $\psi(L_2 \cap C)$, respectivamente, aparecem retilíneos.



Façamos

$$A'_1 = \psi(A) \cap C_1, \quad B'_1 = \psi(B) \cap C_1$$

$$T'_1 = \psi(\bar{T}_1) \cap C_1, \quad T'_2 = \psi(\bar{T}_2) \cap C_1$$

$W_1 = \overline{C_1 - (A'_1 \cup B'_1)}$ o bitoro sólido de superfície $\bar{B}_1$.

Indiquemos com f'_0 a restrição $f_0 \circ \psi^{-1}: S^3 \rightarrow S^2$ ao bitoro superfície $\bar{B}_1$.

Temos, portanto,

$$f'_0: \bar{B}_1 \rightarrow S^2, \quad L_1 \cup L_2 \rightarrow S^1_0, \quad \gamma_0, \quad (S^1_0 \subset S^2)$$

§ 4 - Homotopia de laços em $\bar{B}_1$ e S^2

4.0 - Sejam os laços em $\bar{B}_1$, superfície do bitoro sólido W_1 , com ponto base P_1 (vide fig. acima)

$$\alpha, \beta: S^1 \rightarrow \bar{B}_1, \quad P_1$$

onde $\alpha(S^1) = \overline{P_1 Q_1} \cup \overline{Q_1 P_1}$ (em côr verde), isto é, é composto de um trecho retilíneo $P_1 Q_1$, de uma curva fechada $\Gamma_1 = Q_1 E_1 F_1 Q_1$ que contorna as curvas c_1 e c_2 , e com a mesma orientação de c_1 , e em seguida do trecho retilíneo $Q_1 P_1$, e

$$\beta(S^1) = P_1 \cdot c_1 \cdot \Gamma_1 \cdot c_2^{-1} \cdot \Gamma_1^{-1} \quad (\text{côr azul})$$

isto é, um ponto de $\beta(S^1)$ percorre primeiro c_1 , depois um arco Γ_1 unindo P_1 a R_1 , e segue c_2 no sentido contrário ao indicado na figura acima e depois volta por Γ_1^{-1} até P_1 .

Verifica-se facilmente que α se deixa deformar continuamente em β , isto é, existe uma homotopia (vide Apêndice, § 1)

$$k_t: S^1 \rightarrow P_0 \rightarrow \tilde{B}_1 \rightarrow P_1 \rightarrow P_Q \quad \text{rel } P_Q \quad (0 \leq t \leq 1)$$

tal que $k_0 = \alpha$ e $k_1 = \beta$.

Compondo com f'_0 ,

$$k'_t = f'_0 k_t: S^1 \rightarrow P_0 \rightarrow S^1_0 \rightarrow y_0$$

é uma homotopia entre os laços, com ponto base $y_0 \in S^1_0$,

$$k'_0 = f'_0 \alpha \quad \text{e} \quad k'_1 = f'_0 \beta$$

Seja $\alpha': S^1 \rightarrow P_0 \rightarrow \tilde{B}_1 \rightarrow P_2$ um outro laço, com ponto base P_2 , na tampa inferior de C_1 , análogo a α (vide configuração I_4).

4.1 - LEMA: Existe uma homotopia

$$h_c: (\alpha(S^1) \cup \alpha'(S^1), \{p_1\} \cup \{p_2\}) \rightarrow S^1_0, y_0 \text{ rel } \{p_1\} \cup \{p_2\}$$

entre $h_0 = f'_0|(\alpha(S^1) \cup \alpha'(S^1))$ e a aplicação constante

$$h_1(\alpha(S^1) \cup \alpha'(S^1)) = y_0.$$

Demonstração - Ainda, pelo Cap. IV, podemos supor que os trechos A e B estejam em relação ao cubo C em posição tal que, se um ponto percorre as curvas c_1 c_2 no sentido indicado na tampa superior do cubo C_1 (e igualmente na tampa inferior) a sua imagem pela $f'_0 = f_0 \psi^{-1}$ percorre o equador S^1_0 , de S^2 , num mesmo sentido (isto está de acordo com a definição de f_0).

Indiquemos com a , b e c a restrição de f'_0 aos arcos P_1Q_1 , X_1 e Γ_1 , respectivamente, e lembrando que $f'_0(c_1) = f'_0(c_2) = S^1_0$, temos

$$k'_0 = f'_0 \alpha = a \circ a^{-1}$$

e

$$k'_1 = f'_0 \beta = S^1_0 \circ b \circ (S^1_0)^{-1} \circ b^{-1}$$

Ora, como o grupo fundamental $\pi_1(S^1_0) = \mathbb{Z}$ é abeliano, a classe de homotopia deste último laço é zero, isto é, $f'_0 \beta$ e, em consequência, $f'_0 \alpha$ é homotópica à aplicação constante

$$k': S^1 \rightarrow S^1_0, y_0$$

que leva todo o S^1 em y_0 .

Analogamente se mostra que $f'_0|_{\alpha'(S^1)}$ é homotópica à aplicação constante y_0 e o Lema fica demonstrado.

5.5 - Homotopias de aplicações de $\tilde{B}_1$ em $S^1_0 \subset S^2$

Seja D a parte de $\tilde{B}_1$, que não contém T'_1 e T'_2 , exterior aos arcos fechados $\Gamma_1 = Q_1 E_1 F_1 Q_1$ e $\Gamma_2 = Q_2 E_2 F_2 Q_2$.

D é homeomorfo a um cilindro $S^1 \times I$.

O nosso objetivo, neste parágrafo, é demonstrar o seguinte

5.1 - TEOREMA: Existe $f_1: \tilde{B}_1, L_1 \cup L_2 \rightarrow S^1_0, y_0$ homotópica a f'_0 , tal que $f_1(D) = y_0$ e durante toda a homotopia se conserva fixa a imagem de $T'_1 \cup T'_2$ em S^1_0 .

A demonstração do teorema 5.1 será feita em 5.8 mas exige antes alguns lemas.

5.2 - LEMA: Existe $g': \tilde{B}_1, L_1 \cup L_2 \rightarrow S^1_0, y_0$, homotópica a f'_0 , rel $T'_1 \cup T'_2$, tal que

$$g'(\alpha(S^1) \cup \alpha'(S^1)) = y_0.$$

Demonstração - Consideremos o par triangulável $(\tilde{B}_1, L')$ ((2), pg.60), onde

$L' = (T_1' \cup T_2') \cup (\alpha(s^1) \cup \alpha'(s^1))$ é subcomplexo de $\tilde{B}_1$. Então, o sub-espaço fechado

$$M' = (\tilde{B}_1 \times 0) \cup (L' \times I)$$

do espaço produto $\tilde{B}_1 \times I$ é retracto de $\tilde{B}_1 \times I$ ([7], pg.7), isto é, existe

$$r: \tilde{B}_1 \times I \rightarrow M'$$

contínua, tal que $r|_{M'} =$ identidade de M' .

Definamos $H': M' \rightarrow S_0^1$ por

$$H'(x, t) = \begin{cases} f_0'(x) & \text{se } x \in \tilde{B}_1, t = 0 \\ f_0'(x) & \text{se } x \in T_1' \cup T_2', t \in I \\ h_t(x) & \text{se } x \in \alpha(s^1) \cup \alpha'(s^1), t \in I \end{cases}$$

A continuidade de H' segue-se de [4], Lema 1.1, observando que na intersecção

$$(\alpha(s^1) \cup \alpha'(s^1)) \cap (T_1' \cup T_2') = \{P_1\} \cup \{P_2\}$$

coincidem $f_0'(x)$ e $h_t(x) = y_0$ para todo t ($x = P_1$ ou P_2).

Definiremos, agora, a homotopia $G': \tilde{B}_1 \times I \rightarrow S_0^1$ por

$$G'(x, t) = H'r(x, t), \quad x \in \tilde{B}_1, t \in I.$$

Esta é tal que

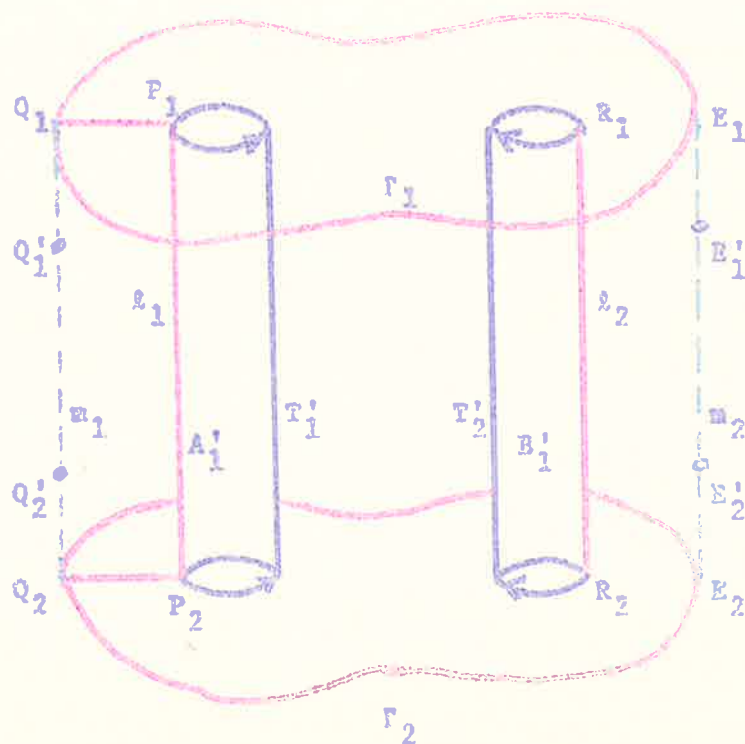
$$G'(x,0) = H'r(x,0) = H'(x,0) = f'_0(x)$$

e, para os pontos $x \in a(s^1) \cup a'(s^1)$,

$$g'(x) = G'(x,1) = H'r(x,1) = H'(x,1) = h_1(x) = y_0 \in s^1_0$$

e, para todo t , os pontos de $f'_0(T'_1 \cup T'_2)$ permanecem fixos em s^1_0 .

5.3 - OBSERVAÇÃO: Estamos, então, na seguinte situação, indicada na figura abaixo, a qual é uma configuração homeomorfa à anterior, (I_4) . As linhas em côr vermelha vão, pela g' , em y_0 .



Configuração (I_5)

Sejam as poligonais sobre $\tilde{E}_1$, $m_1 = Q_1 Q_1' Q_2' Q_2$ e $m_2 = K_1 K_1' K_2' K_2$ (vide configurações I_4 e I_5).

5.4 - LEMA: Existe $g'' : \tilde{E}_1, \ell_1 \cup \ell_2 \rightarrow S_0^1, y_0$, homotópica a g' , tal que $g''(m_1) = y_0$ e durante a homotopia permanece fixa a imagem de $T_1' \cup T_2' \cup \alpha(S^1) \cup \alpha'(S^1)$ em S_0^1 .

Demonstração: Como a aplicação original

$$f'_0 : \tilde{E}_1, \ell_1 \cup \ell_2 \rightarrow S_0^1, y_0$$

estende-se ao interior do bitoro sólido W_1 , $g' = f'_0$ também se estende.

O retângulo $P_1 Q_1 Q_1' Q_2' Q_2 P_2$ (vide configuração I_4) é homeomorfo a $m_1 \times I$ (vide configuração I_5) por um homeomorfismo que a $m_1, \ell_1, Q_1 P_1$ e $Q_2 P_2$ faz corresponder $m_1 \times \{0\}, m_1 \times \{1\}, Q_1 \times I$ e $Q_2 \times I$, respectivamente. A extensão de g' ao interior desse retângulo dá uma homotopia entre $g'|_{m_1}$ e $g'|_{\ell_1} = y_0$ (aplicação constante), e como $g'(Q_1 P_1) = g'(Q_2 P_2) = y_0$ e homotopia obtida deixa fixas durante todo o tempo, as imagens dos pontos Q_1 e Q_2 em S_0^1 . Portanto,

$$g'|_{m_1} = y_0 \text{ rel } (Q_1) \cup (Q_2)$$

e seja h'_t esta homotopia.

Repetindo o raciocínio usado na demonstração do Lema 5.2, considerado, agora, o par triangulável $(\tilde{B}_1, L'')$ com $L'' = L' \cup n_1$ a retração $r': \tilde{B}_1 \times I \rightarrow M'' = (\tilde{B}_1 \times 0) \cup (L'' \times I)$ e $H'': M'' \rightarrow S^1_0$ definida por

$$H''(x, t) = \begin{cases} g'(x) & \text{se } x \in \tilde{B}_1, \quad t = 0 \\ g'(x) & \text{se } x \in L', \quad t \in I \\ h'_t(x) & \text{se } x \in n_1, \quad t \in I \end{cases}$$

Então $G'': \tilde{B}_1 \times I \rightarrow S^1_0$ definida por $G''(x, t) = H''r'(x, t)$ é uma homotopia entre g' e uma aplicação

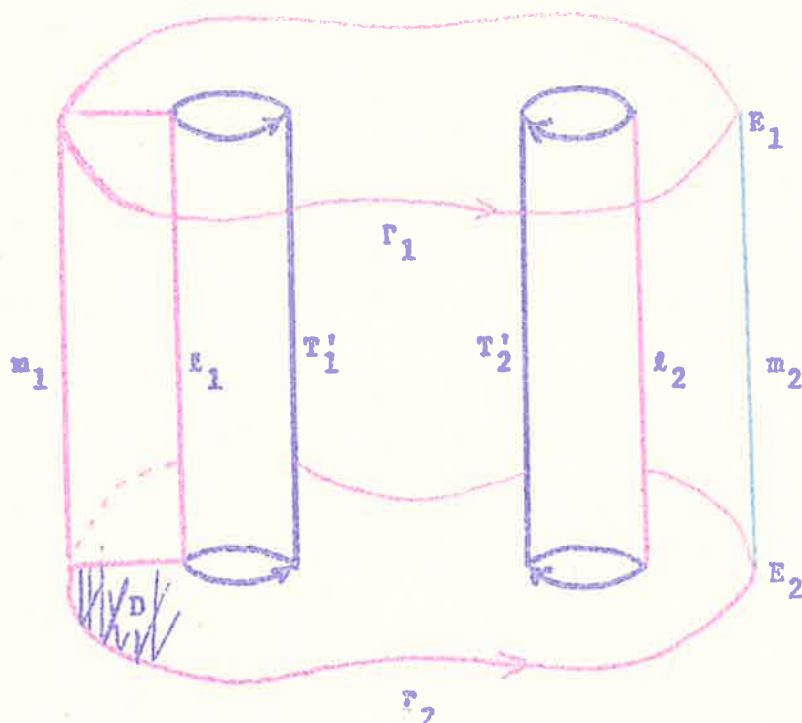
$$g'': \tilde{B}_1, \ell_1 \cup \ell_2 \rightarrow S^1_0, y_0$$

tal que $g''(x) = y_0$ se $x \in n_1$ e durante toda a homotopia permanecem fixas as imagens dos pontos de

$$L' = \tau'_1 \cup \tau'_2 \cup \alpha(S^1) \cup \alpha'(S^1)$$

em S^1_0 .

5.5 - OBSERVAÇÃO: Estamos, agora, na seguinte situação indicada pela figura abaixo :
tôdas as linhas em vermelho vão pela g'' em y_0 .



Configuração (I_6)

5.6 - LEMA: Existe $g''' : \tilde{B}_1, \ell_1 \cup \ell_2 + s_0^1, y_0$, homotópica a g'' rel. L'' =
 $= T_1' \cup T_2' \cup \alpha(s^1) \cup \alpha'(s^1) \cup m_1$ e tal que $g'''(m_2) = y_0$.

Demonstração: Dividamos a superfície do cilindro D , limitado pelas curvas Γ_1 e Γ_2 , por meio das geratrizes m_1 e m_2 , em duas partes, R_1 e R_2 , homeomorfas a um retângulo. (Vide configuração I_6 .)

Como g'' está definida em $\tilde{B}_1$, que contém $R_1 \cup R_2$, segue-se de $g''(m_1) = y_0$ que

$$g''|_{m_2} = y_0 \text{ rel } \{E_1\} \cup \{E_2\}.$$

Repetindo o raciocínio utilizado na demonstração dos Lemas anteriores, mostra-se que essa homotopia parcial, entre $g''|_{m_2}$ e a aplicação constante y_0 , se estende a uma homotopia total entre g'' e uma aplicação

$$g''' : \tilde{B}_1, l_1 \cup l_2 \rightarrow S_0^1, y_0$$

tal que $g'''(m_2) = y_0$, sendo a homotopia rel. L'' , com o que fica o Lema demonstrado.

5.7 - LEMA: Existe $f_1 : \tilde{B}_1, l_1 \cup l_2 \rightarrow S_0^1, y_0$,

$$f_1 = g''' \text{ rel. } L'' = L'' \cup m_2 \text{ tal que}$$

$$f_1(D) = y_0.$$

Demonstração - Observando que g''' está definida nos "retângulos" R_1 e R_2 e $g'''(\text{Fr } R_1) = g'''(\text{Fr } R_2) = y_0$ e que a classe de homotopia de $g'''|_{R_1} : R_1, \text{Fr } R_1 \rightarrow S_0^1, y_0$ ($i=1,2$) é um elemento

$$(g'''|_{R_1}) \in \pi_2(S_0^1) = 0$$

segue-se que $g'''|_{R_1}$ é homotópica à aplicação constante y_0 , homotopia relativa à fronteira de R_1 . Considerando, então, o par triangulável $(\tilde{B}_1, L'' \cup D)$ vê-se que essa homotopia parcial entre $g'''|_D = R_1 \cup R_2$ e a aplicação constante y_0 também

se estende a uma homotopia total entre g''' e uma aplicação

$$f_1: \tilde{B}_1, f_1 \cup f_2 \rightarrow S_0^1, y_0$$

tal que $f_1(D) = y_0$, homotopia relativa a $L''' = L'' \cup n_2$.

5.8 - Demonstração do Teorema 5.1

Os Lemas 3.2, 5.4, 5.6 e 5.7 implicam

$$f_1 = g''' = g'' = g' = f'_0 \text{ rel } T'_1 \cup T'_2$$

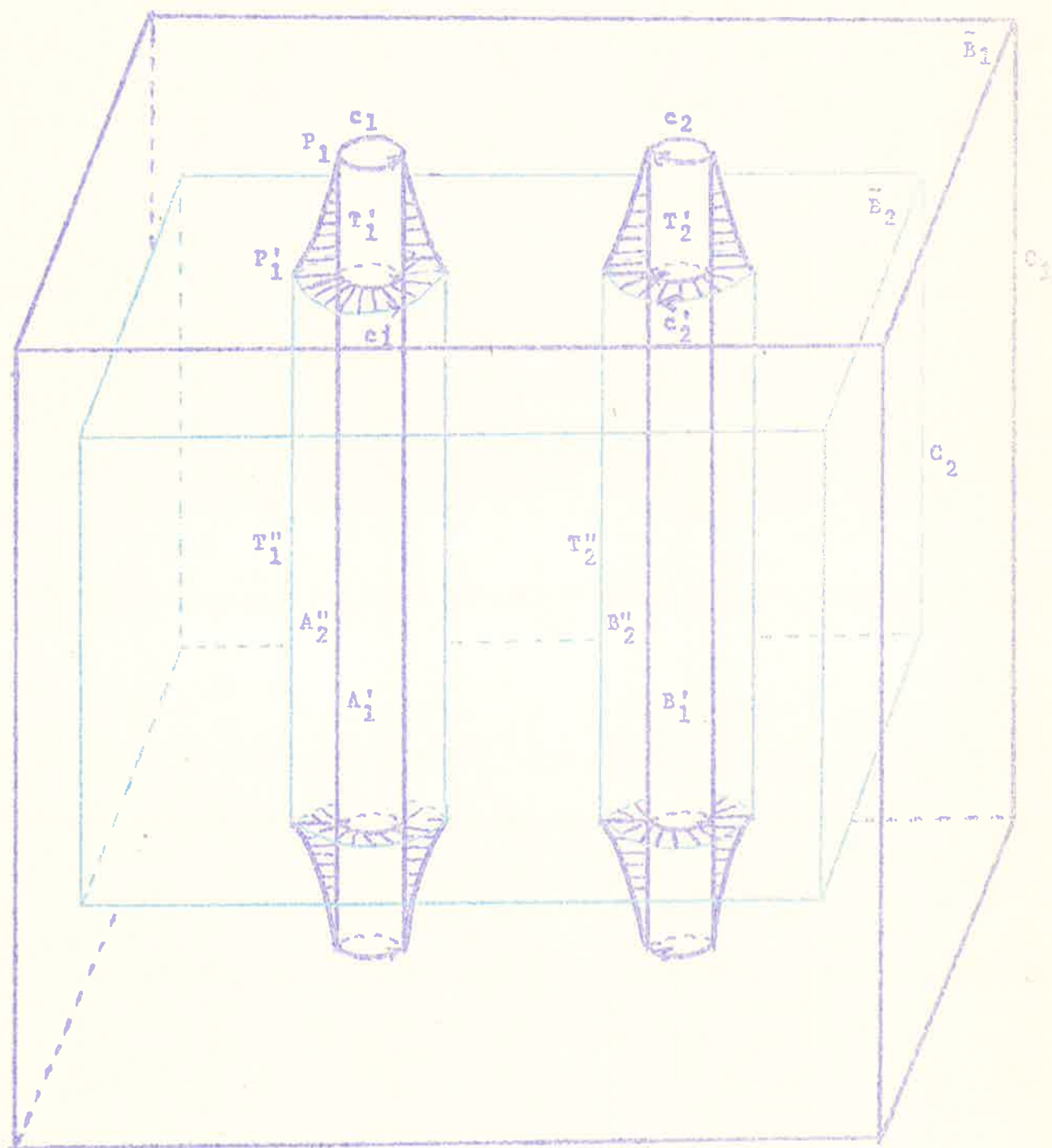
e $f_1(D) = y_0$ o que demonstra o teorema 5.1.

§ 6 - Homeomorfismos entre W_1 e outro bitoro sólido

$$W_2 \subset W_1 \text{ e de } \tilde{B}_1 \times I \text{ sobre } X = \overline{W_1 - W_2}$$

Consideremos no interior do cubo original C_1 (vide configuração I_4) um outro cubo concêntrico C_2 e uma expansão dos cilindros sólidos A_1' e B_1' , dentro de C_1 , como indica a figura abaixo. Indiquemos com A_2'' e B_2'' os cilindros sólidos, contidos no cubo C_2 , obtidos depois da expansão e denotemos com T_1'' e T_2'' as superfícies laterais de A_2'' e B_2'' , respectivamente.

Sejam os bitoros sólidos $W_1 = \overline{C_1 - (A_1' \cup B_1')}$ de superfície $\tilde{B}_1$ e $W_2 = \overline{C_2 - (A_2'' \cup B_2'')}$ de superfície $\tilde{B}_2$ e a "casca" $X = \overline{W_1 - W_2}$.



Vê-se, claramente, que existe um homeomorfismo

$$H: W_1 \rightarrow W_2$$

de W_1 sobre W_2 , que "murcha" W_1 em W_2 , levando $\tilde{B}_1$ sobre $\tilde{B}_2$, o qual é homotópico a 1_{W_1} ; isto é, existe aplicação contínua

$$F: W_1 \times I \rightarrow W_1$$

tal que $F(x,0) = x$ e $F(x,1) = H(x)$ para todo $x \in W_1$. Esta F pode ser vista como uma família contínua de homeomorfismos

$$h_t: W_1 \rightarrow W_1 \quad (0 \leq t \leq 1)$$

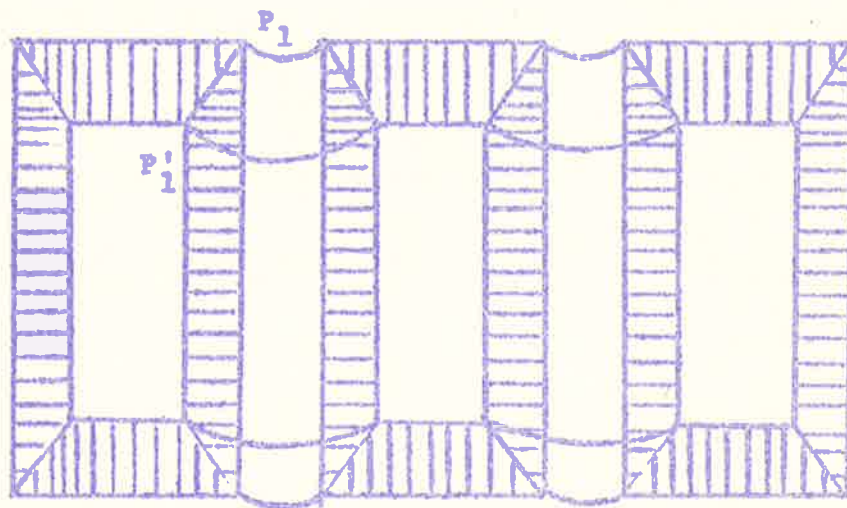
de W_1 em W_1 , tal que $h_0 = 1_{W_1}$ e $h_1 = H$.

A aplicação

$$v = F|_{\tilde{B}_1 \times I}: \tilde{B}_1 \times I \rightarrow W_1$$

é um homeomorfismo de $\tilde{B}_1 \times I$ sobre $X = \overline{W_1 - W_2}$ tal que $v(x,0) = x$ e $v(x,1) = (H|_{\tilde{B}_1})(x)$, $x \in \tilde{B}_1$; isto é, v leva $\tilde{B}_1 \times I$ homeomorficamente sobre $\tilde{B}_2$.

Na figura abaixo, a parte achuriada representa uma secção vertical do espaço $X \approx \tilde{B}_1 \times I$ e $P_1 P_1'$ representa a imagem, pelo homeomorfismo v , de $\{P_1\} \times I$.



Temos: $v(\tilde{B}_1 \times I) = X$, $v(\tilde{B}_1 \times 0) = \tilde{B}_1$, $v(\tilde{B}_1 \times 1) = \tilde{B}_2$, $v(T'_1 \times 0) = T'_1$, $v(T'_1 \times 1) = T''_1$ ($i=1,2$), $v(D \times 0) = D$ e $v(D \times 1) = D'$. (Vide § 3, configuração I_4 e fig. 1 do § 7, a seguir).

§ 7 - Extensão de f'_0 a $X = \overline{W_1 - W_2}$

Podemos interpretar a homotopia $G: \tilde{B}_1 \times I \rightarrow S^1_0$ (do teorema 5.1) tal que $G(x,0) = f'_0(x)$ e $G(x,1) = f_1(x)$, $x \in \tilde{B}_1$, como a extensão da aplicação

$$f'_0: \tilde{B}_1, \iota_1 \cup \iota_2 \rightarrow S^1_0, y_0 \quad (\text{vide § 3, parte final})$$

a $\tilde{B}_1 \times I$. Em consequência,

$$F_X = G \circ v^{-1}: X \rightarrow S_0^1$$

é uma extensão de f'_0 para dentro do bitoro sólido W_1 , até preencher a "casca" X , de modo que, no estágio final temos a aplicação contínua

$$\bar{f}_1 = F_X|_{\tilde{B}_2}: \tilde{B}_2 \rightarrow S_0^1$$

Seja $p_1: \tilde{B}_1 \times I \rightarrow \tilde{B}_1$ a projeção canônica sobre o primeiro fator: $p_1(x,t) = x$ e seja o homeomorfismo sobre,

$$h = H|_{\tilde{B}_1}: \tilde{B}_1 \rightarrow \tilde{B}_2$$

Temos o seguinte diagrama comutativo:

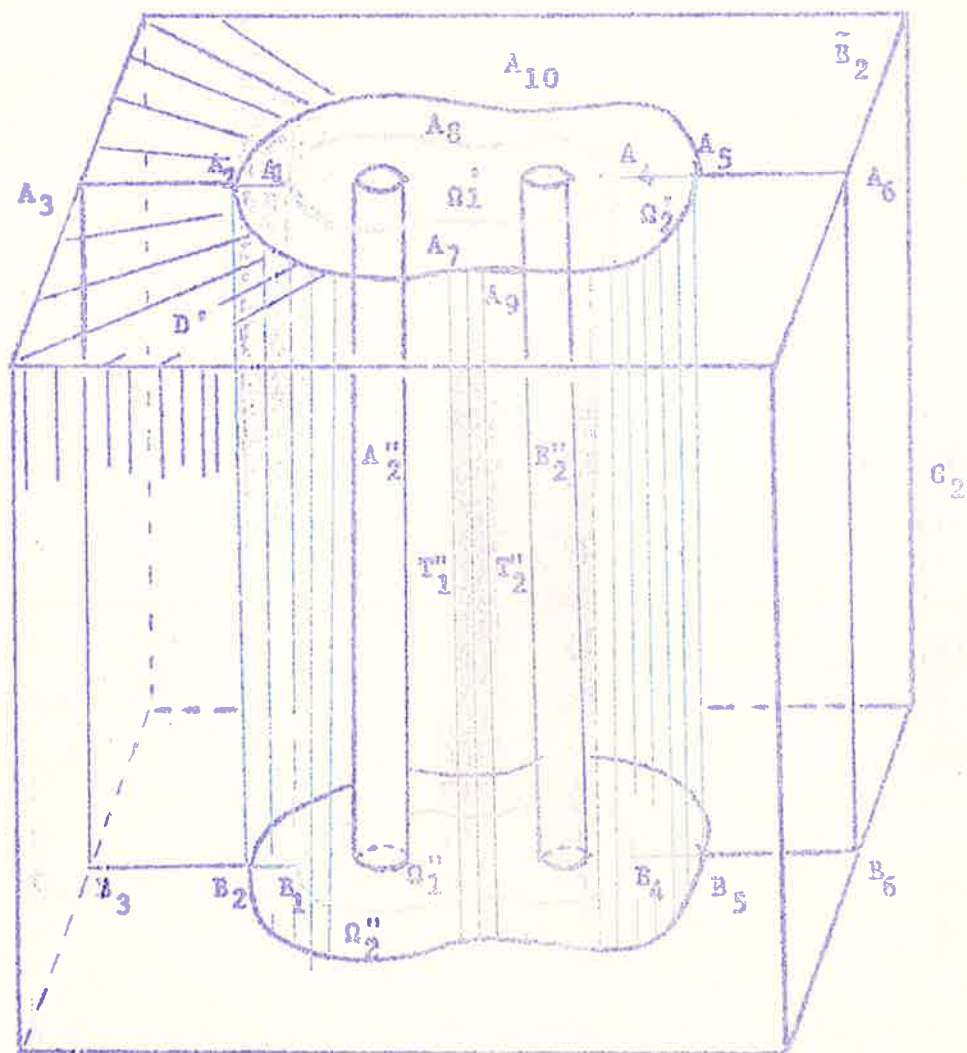
$$\begin{array}{ccc}
 \tilde{B}_1 & \xleftarrow{p_1} & \tilde{B}_1 \times I, (\tilde{B}_1 \times 0, \tilde{B}_1 \times 1) \xrightarrow[v]{v} X = W_1 - W_2, (\tilde{B}_1, \tilde{B}_2) \\
 & \searrow f_1 = f'_0 & \downarrow G \\
 & & S_0^1 \xleftarrow{F_X, (f'_0, \bar{f}_1)} \\
 & \downarrow H & \\
 W_1, \tilde{B}_1 & \xrightarrow{h = H|_{\tilde{B}_1}} & W_2, \tilde{B}_2 \\
 & & p_1 \circ v^{-1}|_{\tilde{B}_2} = h^{-1}
 \end{array}$$

Então:

$$\bar{F}_1 = F_X | \bar{B}_2 = C v^{-1} | \bar{B}_2 = f_1 p_1 v^{-1} | \bar{B}_2 = f_1 h^{-1} : \bar{B}_2 \rightarrow \bar{B}_2^1$$

é tal que

$$\bar{F}_1(D') = y_0 \quad \text{onde} \quad D' = v(D = \{1\})$$



Indiquemos com Ω_1' e Ω_2' as regiões da tampa superior do cubo C_2 , limitadas pelas curvas fechadas $A_1A_7A_4A_8A_1$ e $A_2A_9A_5A_{10}A_2$, respectivamente, e com Ω_1'' e Ω_2'' as regiões correspondentes na tampa inferior.

Então,

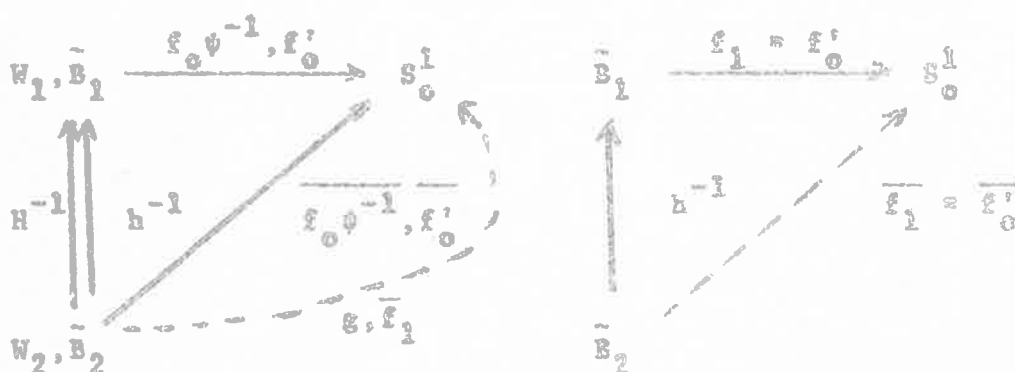
$$D' = Fr C_2 - (\Omega_1' \cup \Omega_2')$$

Sejam os cilindros (fig. 1 acima) $J_1 = \Omega_1'' \times I$ e $J_2 = \Omega_2'' \times I$ onde $\Omega_1'' = \Omega_1'' \times 0$, $\Omega_2'' = \Omega_2'' \times 0$, $\Omega_1' = \Omega_1'' \times 1$, $\Omega_2' = \Omega_2'' \times 1$, $I = (0,1)$ = altura do cubo C_2 . (O símbolo $\times$ aqui significa: é identificado com.)

§ 8 - Extensão de $\bar{F}_1$ a W_2

Procuramos, agora, estender $\bar{F}_1 = \pi_X|_{\bar{S}_2}$ ao interior do bitoro sólido W_2 .

Temos os seguintes diagramas comutativos:



Como $\overline{f'_0} = f'_0 h^{-1}$ se estende a W_2 ($\overline{f'_0 h^{-1}} = f'_0 h^{-1} h^{-1}$ é a extensão), $\overline{f'_1} = f'_1 h^{-1}$ sendo homotópica a $\overline{f'_0}$ também se estende a W_2 .

Seja $g: W_2 \rightarrow S^1_0$ a extensão a W_2 de $\overline{f'_1}: \tilde{B}_2 \rightarrow S^1_0$.

§ 9 - Expansão do cilindro J_2

Mostraremos que existe uma aplicação contínua

$$e_{J_2}: C_2 \rightarrow C_2 \quad (\text{expansão do cilindro } J_2)$$

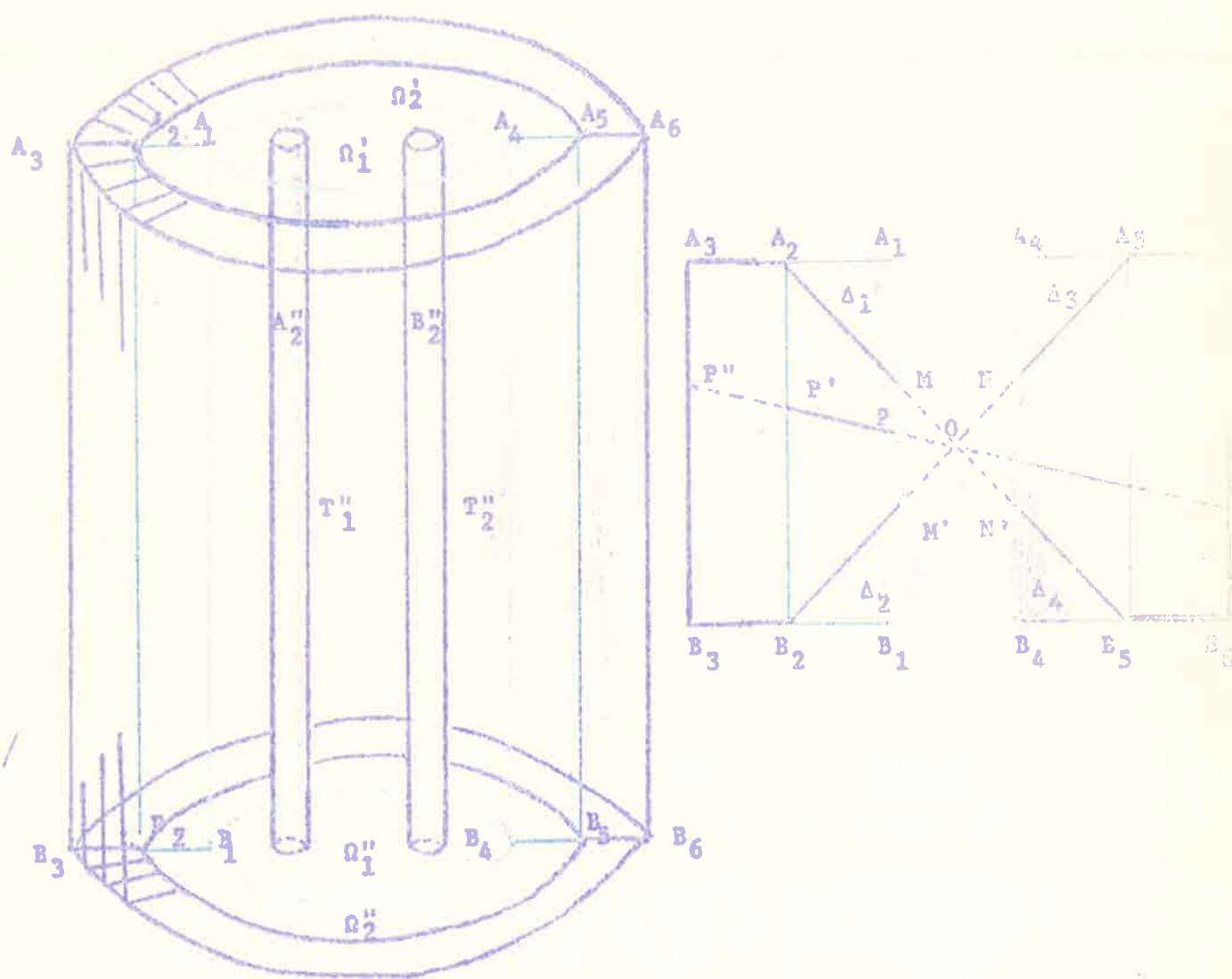
que leva J_2 homeomorficamente sobre C_2 , levando, $C_2 = J_2^0$ em $\text{Fr } C_2$, a parte lateral de $\text{Fr } J_2$ em D' e tal que

$$e_{J_2}|(J_1 \cup \text{Fr } C_2) = \text{identidade}.$$

Veremos melhor esta aplicação considerando um cilindro homeomorfo ao cubo C_2 num modelo análogo à configuração indicada acima (fig. 1 do § 7).

Nas figuras abaixo temos este modelo e uma secção vertical.

Podemos imaginar a expansão, numa secção vertical, da seguinte maneira: seja O o centro do quadrado $A_3 B_3 B_6 A_6$ e indiquemos com M e M' (N e N') as projeções, a partir de O , dos



pontos A_2 e B_2 (A_5 e B_5) sobre o lado A_1B_1 (A_4B_4) respectivamente. Para cada ponto P no segmento MM' (NN') consideremos as intersecções P' e P'' , do raio vetor OP com A_2B_2 (A_5B_5) e a poligonal $A_2A_3B_3B_2$ ($A_5A_6B_6B_5$), respectivamente. Indiquemos, ainda, com Q o quadrado $A_1B_1B_4A_4$ e com Δ_i ($i=1, \dots, 4$) os triângulos MA_1A_2 , $M'B_1B_2$, NA_4A_5 e $N'B_4B_5$, respectivamente.

Então, $c_{J_2} | (Q \cup \Delta_i) = \text{identidade}$ e c_{J_2} leva PP' linearmente sobre PP'' , levando $P'P''$ em P'' .

§ 10 - Construção de $F_1: S^3 \rightarrow S^2$

Definamos, agora, a aplicação contínua

$$F_1: S^3 \rightarrow S^2$$

por

$$F_1(x) = \begin{cases} f_0 \phi^{-1}(x) & \text{se } x \in S^3 - \overset{0}{W}_1 \\ F_X(x) & \text{se } x \in X = \overline{W_1 - W_2} \\ g_{C_{J_2}}(x) & \text{se } x \in W_2 = \overline{C_2 - (A_2'' \cup B_2'')} \end{cases}$$

F_1 é diferenciável no interior de $V' = V_1' \cup V_2'$ (§ 1). $F_1^{-1}(a_i) = \gamma_i'$ e a_i ($i=1,2$) é valor regular de $F_1|_{\overset{0}{V}_1}$, pois em $\overset{0}{V}_1$ coincide com $f_0 \phi^{-1}$ que tem estas propriedades. Notamos, ainda, que $F_1(C_2 - J_2) = \gamma_0$.

§ 11 - Solução do problema do "desvio"

Estamos, agora, em condição de fazer o "desvio"

(§ 2).

Consideremos, contido em C_2 , um cilindro torcido J_2' ,

difeomorfo a J_2 , obtido da seguinte maneira: sujeitamos cada secção horizontal $\Omega_2'' \times t$ de $J_2 = \Omega_2'' \times I$ a uma rotação, em torno de $\gamma_1' \cap A_2''$, que varia diferenciavelmente com t , distância da secção à tampa inferior $\Omega_2'' \times 0$ de J_2 .

A rotação $\theta(t)$ deve ser tal que, quando t cresce de 0 a 1, $\theta(t)$ cresce de 0 a 2π e assim $\Omega_2' \equiv \Omega_2'' \times 1$ sofrerá uma rotação completa e voltará a coincidir consigo mesma e de tal forma que a função $\theta(t)$ se estenda a uma função de classe C^∞ que vale zero para valores de $t \leq 0$ e 2π para $t \geq 1$. Notemos que devemos imaginar o cubo C_2 suficientemente grande (ou J_2 suficientemente pequeno) para permitir esta rotação dentro de C_2 .

Uma rotação $\theta(t)$, função de classe C^∞ de t , pode ser dada, por exemplo, utilizando-se da seguinte função de classe C^∞ : (Vide [10], pgs. 164-166.)

$$\beta(t) = \begin{cases} e^{-1/t(1-t)} & \text{se } 0 < t < 1 \\ 0 & \text{para os demais valores de } t \end{cases}$$

Então, indicando com $A = \int_0^1 \beta(t)dt$ a área subentendida pelo gráfico de β e o eixo das abscissas, a função

$$\theta(t) = \frac{2\pi}{A} \int_0^t \beta(x)dx$$

é de classe C^∞ e $0 \leq \theta(t) \leq 2\pi$ para $0 \leq t \leq 1$.

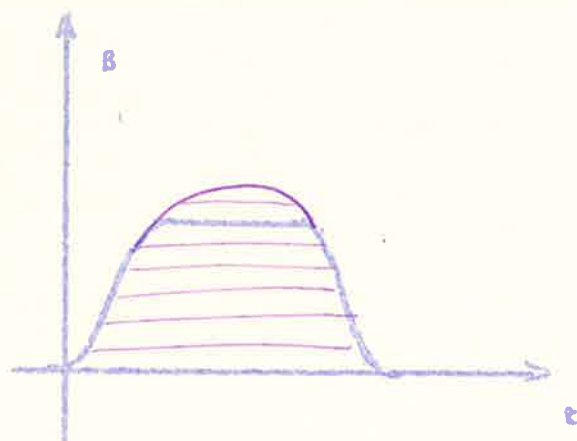


Gráfico de β

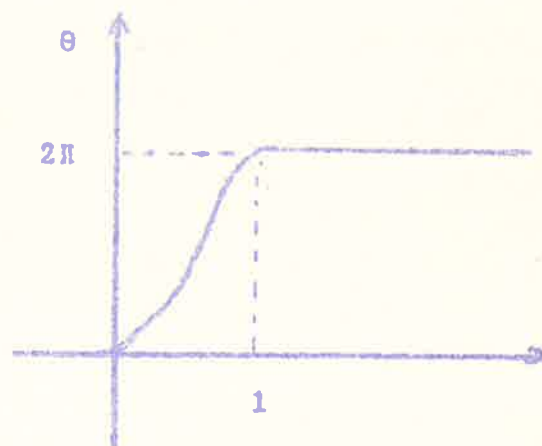


Gráfico de θ

Seja $\mu: J'_2 \rightarrow J_2$ o difeomorfismo de J'_2 sobre J_2 , descrito acima, o qual restrito a $\Omega'_2 \cup \Omega''_2$ é a identidade. Considerando o difeomorfismo inverso, tem-se $\bar{\gamma}_1 = \mu^{-1}(\gamma'_1 \cap A''_2) = \gamma'_1 \cap A''_2$, $\mu^{-1}(A''_2) = A''_2$ e $\mu^{-1}(B''_2)$ é uma vizinhança tubular de $\bar{\gamma}_2 = \mu^{-1}(\gamma'_2 \cap B''_2)$ curva que se emenda com a curva $\gamma'_2 \cap (S^3 - C_2)$ para dar uma curva γ_2 agora com número de entrelaçamento, com γ'_1 , igual a $e = 1$.

Façamos $\gamma'_1 = \gamma_1$ e $V'_1 = V_1$ (vide § 2).

Definamos, agora, a aplicação $F_2: S^3 \rightarrow S^2$ por

$$F_2(x) = \begin{cases} F_1 \mu(x) & \text{se } x \in J'_2 \\ \gamma_0 & \text{se } x \in C_2 - J'_2 \\ F_1(x) & \text{se } x \in S^3 - C_2 \end{cases}$$

que é bem definida e contínua e é diferenciável no interior das vizinhanças tubulares V_1 e V_2 de γ_1 e γ_2 , respectivamente, e $F_2^{-1}(a_1) = \gamma_1$, $F_2^{-1}(a_2) = \gamma_2$, a_i ($i=1,2$) valor regular de F_2 .

Aplicando o teorema de δ -aproximação (Cap. I, Lema 5.1), obtemos $f:S^3 \rightarrow S^2$ diferenciável, a qual é uma δ -aproximação de F_2 e que coincide com F_2 em uma vizinhança tubular $\tilde{V}_1 \subset V_1$, de γ_1 , de raio eventualmente menor do que o de V_1 ; em consequência, $f^{-1}(a_1) = \gamma_1$ e a_1 é valor regular de f , com o que fica efetuada a operação desvio citada no início deste capítulo.

§ 12 - Observações

1) Conforme se deseja que o número de entrelaçamento das novas curvas γ_i , depois da operação desvio, seja $\epsilon + 1$ ou $\epsilon - 1$, faz-se a rotação $\theta(t)$ definida no parágrafo anterior num ou noutro sentido.

2) As construções feitas neste capítulo mostram que a resposta ao problema do desvio é também afirmativa quando os trechos A e B (vide § 2) são do mesmo tubo, isto é, as construções são válidas também para "desfazer" o nó transformando-o num trivial.

C A P Í T U L O I V

APLICAÇÕES DE S^3 EM S^2 NO CASO DE NÓS ENTRELACADOS

Neste capítulo demonstraremos o

Teorema Principal : Dados dois nós γ_1 (triviais ou não), disjuntos, entrelaçados, regularmente imersos em S^3 e dados dois pontos distintos a_i ($i=1,2$) de S^2 , existe aplicação diferenciável

$$f: S^3 \rightarrow S^2$$

tal que $f^{-1}(a_i) = \gamma_i$, a_i valor regular de f .

Antes, porém, vejamos alguns resultados preliminares.

§ 1 - Difeomorfismo de R^3 sobre si mesmo que leva um nó diferenciável em outro nó diferenciável, com trechos retilíneos

Em (1), pg. 149, se demonstra que, se um nó K , parametrizado por comprimento de arco, é de classe C^1 , então ele é c -equivalente a um nó poligonal (Apêndice, § 2.4), 13-

to é, para cada $\epsilon > 0$ existe um homeomorfismo h de R^3 sobre si mesmo tal que $h(K)$ é poligonal e $||h(p)-p|| < \epsilon$ para todo $p \in R^3$. Além disso, h é realizável por uma deformação isotópica de R^3 e move apenas pontos que distam do nó menos do que ϵ (a isotopia é apenas contínua, não diferenciável).

Aproveitaremos alguns resultados desta demonstração para construir um difeomorfismo H de R^3 sobre si mesmo que leva um nó diferenciável em um outro nó diferenciável, com trechos retilíneos.

Admitamos que o nó K , retificável (comprimento finito), seja dado como imagem de uma função periódica, a valores vetores,

$$p(s) = (x(s), y(s), z(s))$$

do comprimento de arco s , cuja derivada

$$p'(s) = (x'(s), y'(s), z'(s))$$

existe e é contínua para todo s .

Consideremos a função contínua

$$f: K \times K \rightarrow R$$

definida por

$$f(p, p') = \begin{cases} \frac{||p-p'||}{\text{arc}(p, p')} , & p \neq p' \\ 1 & , \quad p = p' \end{cases}$$

Como f é positiva e seu domínio é compacto, ela tem um valor mínimo $\underline{m}$. Assim,

$$(1) \quad ||p-p'|| \geq \underline{m} \cdot \text{arc}(p, p') \quad p, p' \in K$$

Observemos que, se escolhermos valores do parâmetro

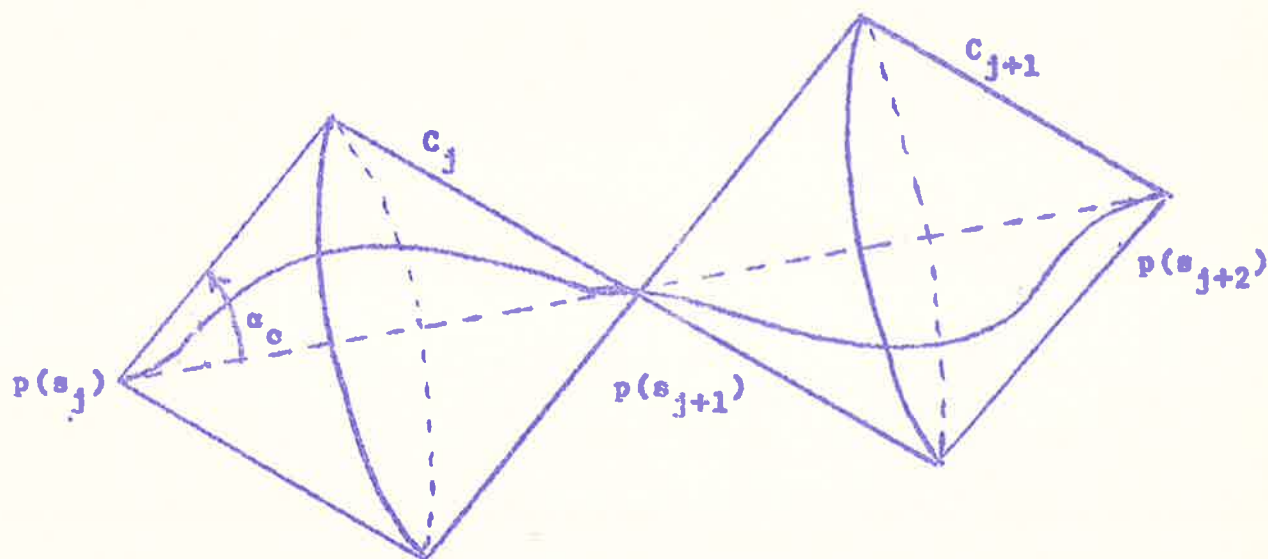
$$\{s_j\}_{j=-\infty}^{+\infty} \quad \text{tal que } s_{j+1} - s_j = \frac{l}{n}$$

onde l é o comprimento de K e n um número inteiro positivo, então, $p(s_i) = p(s_j)$ se e somente se $i \equiv j \pmod{n}$ e, assim, o conjunto $\{p(s_j)\}$, $-\infty < j < +\infty$, consiste de exatamente n pontos do nó.

Em (1), pgs. 149-152, se demonstra que, escolhendo um ângulo positivo $\alpha_0 < \frac{\pi}{4}$ tal que $\text{tg } \alpha_0 < m/2$, para este ângulo α_0 e n suficientemente grande, podemos formar, para cada s_j , o bi-cone sólido C_j (dois cones circulares simétricos com a base comum) com o ângulo do vértice igual a α_0 e cujo eixo é a corda unindo $p(s_j)$ e $p(s_{j+1})$, satisfazendo a

I,1) os bi-cones C_j são arbitrariamente pequenos, isto é, o máximo diâmetro é menor do que um prefixado ϵ ;

- I,2) bi-cones adjacentes interceptam-se apenas nos vértices comuns;
- I,3) se $s_j \leq s \leq s_{j+1}$, então, $p(s) \in C_j$;
- I,4) para cada secção perpendicular D de um bi-cone C_j , existe exatamente um s no intervalo $[s_j, s_{j+1})$ tal que $p(s) \in D$;
- I,5) bi-cones não adjacentes são disjuntos.



Sejam γ_1 e γ_2 os dois nós regularmente imersos em S^3 , disjuntos, entrelaçados.

Seja d a mínima distância entre os dois nós regulares.

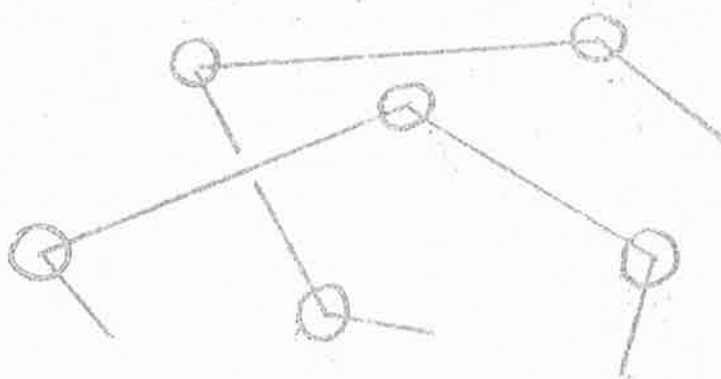
Como cada nó γ_i ($i=1,2$) é uma curva regular cujo domínio é compacto, então, γ_i é retificável e, então, em vista do

que vimos anteriormente, escolhido $0 < \epsilon < \frac{d}{2}$ existem números inteiros n_i ($i=1,2$) suficientemente grandes tais que dividindo cada nó γ_i pelos n_i pontos, podemos construir os bi-cones sólidos C_{ij} ($i=1,2$; $j=1,\dots,n_i$) com vértices v_{ij} naqueles pontos e nas condições (I,1) a (I,5).

Consideremos os nós poligonais K_i ($i=1,2$) cujos vértices v_{ij} são os n_i pontos acima, e cujas arestas são os eixos dos bi-cones sólidos C_{ij} , e seja $K = K_1 \cup K_2$ a reunião (disjunta) dos dois nós poligonais. Conforme se vê no Apêndice desta tese, § 2.10, existe em $R^3 = S^3 - \{w\}$ uma direção $\underline{u}$ em relação à qual K está em posição regular. (Apêndice, § 2.7).

Seja $K' = \Pi(K)$ a projeção ortogonal de K sobre um plano perpendicular àquela direção $\underline{u}$. Como K está em posição regular em relação a esta projeção Π , os pontos múltiplos de K' são apenas duplos e em número finito, e representam um efetivo cruzamento, isto é, nenhum ponto duplo é imagem de um vértice de K .

Logo, cada vértice de $K' = \Pi(K)$ tem uma distância positiva das arestas que não incidem neste vértice.



Consideremos, agora, no plano da projeção de K , discos D_{ij} ($i=1,2; j=1,\dots,n_i$), de centro nos vértices $\Pi(v_{ij})$ de K' e raio r_{ij} suficientemente pequeno de modo que não interceptem nenhuma das arestas de K' que não incidem em $\Pi(v_{ij})$. Os cilindros projetantes, V_{ij} , dos discos D_{ij} , segundo a direção $\underline{u}$, não interceptam nenhuma das arestas de K que não incidem no vértice v_{ij} . Consideremos, então, com centro em cada vértice v_{ij} bolas B_1^{ij} e $B_{1/2}^{ij}$, de raios r_{ij} e $r_{ij}/2$, respectivamente.

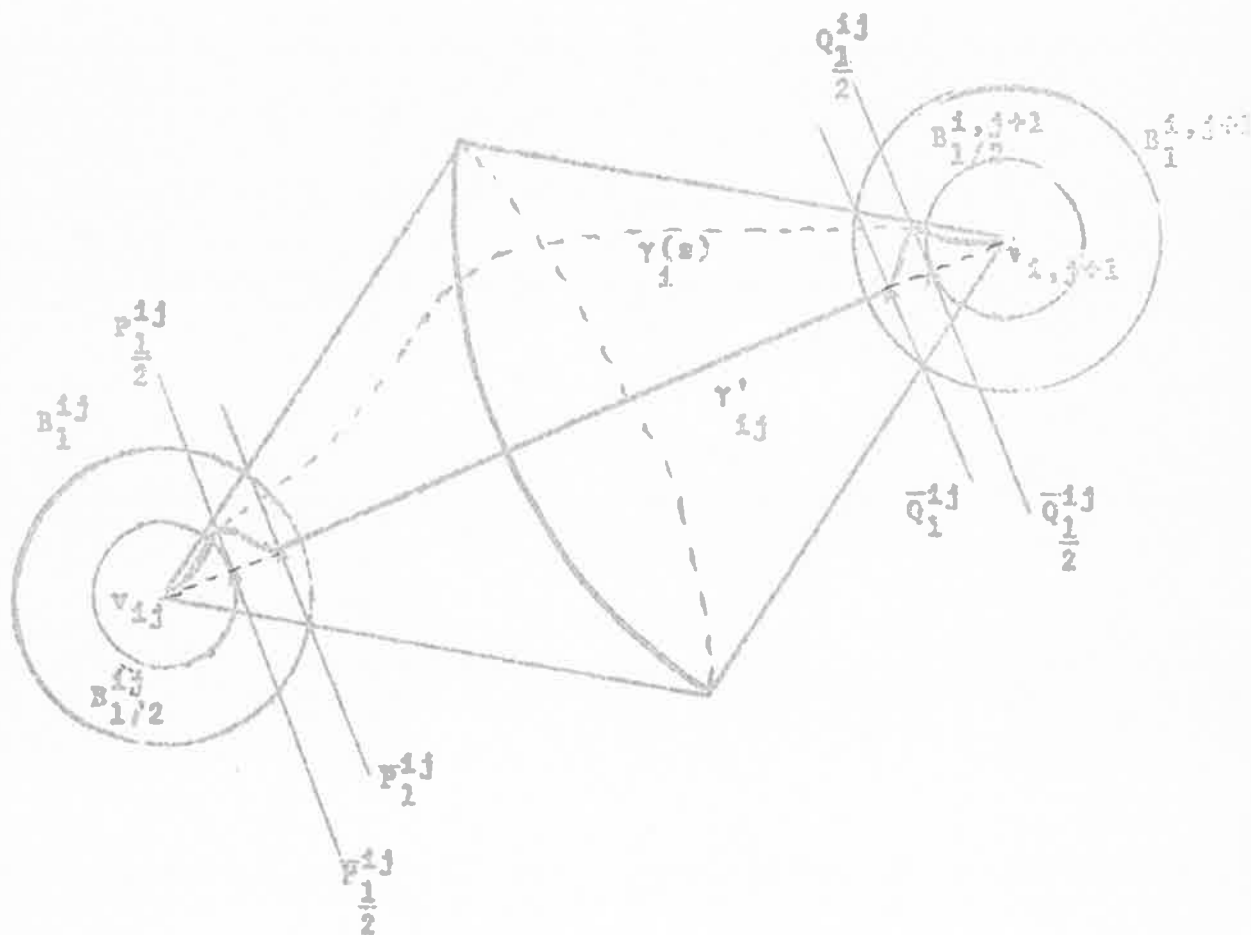
Estas estão, portanto, contidas nos cilindros projetantes V_{ij} .

Sejam $\bar{P}_{1/2}^{ij}$ e $\bar{Q}_{1/2}^{ij}$ os pontos intersecção da corda $(v_{ij}, v_{i,j+1})$ com as bolas $B_{1/2}^{ij}$ e $B_{1/2}^{i,j+1}$, respectivamente, e indiquemos com $P_{1/2}^{ij}$ e $Q_{1/2}^{ij}$ os pontos intersecção da curva γ_i com os discos perpendiculares à corda $(v_{ij}, v_{i,j+1})$, pelos pontos $\bar{P}_{1/2}^{ij}$ e $\bar{Q}_{1/2}^{ij}$, respectivamente.

Os discos cujo bordo são as circunferências $(Fr B_1^{ij}) \cap (Fr C_{ij})$ e $(Fr B_1^{i,j+1}) \cap (Fr C_{ij})$, são perpendiculares àquela corda em pontos que denotaremos com $\bar{P}_1^{ij}$ e $\bar{Q}_1^{ij}$, respectivamente.

No interior de cada bi-cone C_{ij} consideremos uma curva diferenciável γ'_{ij} constituída:

- dos arcos $(v_{ij}, \bar{P}_{1/2}^{ij})$ e $(\bar{Q}_{1/2}^{ij}, v_{i,j+1})$ do nó γ_i ;
- do segmento retilíneo $\bar{P}_1^{ij} \bar{Q}_1^{ij}$ sobre a corda $(v_{ij}, v_{i,j+1})$;



c) de arcos regulares que se amendam diferenciavelmente com os anteriores, unindo $p_{1/2}^{1j}$ com $\bar{r}_1^{1j}$ e $\bar{Q}_1^{1j}$ com $Q_{1/2}^{1j}$ e que são interceptados por um plano normal ao eixo $(v_{1j}, v_{1,j+1})$ em um único ponto.

Da maneira como foram construídas as curvas diferenciáveis

$$\gamma_i = \bigcup_j \gamma_{1j}$$

existe uma isotopia h_t , $0 \leq t \leq 1$, de classe C^∞ , das curvas originais γ_1 , tal que $h_1 \gamma_1 = \gamma_1'$ e h_t é um difeomorfismo para cada t , e que é igual à identidade nos arcos $\gamma_1 \cap B_{1/2}^{ij}$.

Por um conhecido Lema, esta isotopia parcial estende-se a uma isotopia total

$$H_t: R^3 \rightarrow R^3 = S^3 - \{u\}$$

do meio ambiente tal que $H_0 = \text{identidade}$.

§ 2 - Demonstração do Teorema Principal

Cada ponto duplo da projeção $K' = \Pi(K)$ é imagem de dois pontos de K , os quais pertencem aos segmentos retilíneos de $H_1(\gamma_1 \cup \gamma_2) = \gamma_1' \cup \gamma_2'$.

O de maior (menor) cota em relação ao plano da projeção será chamado "ponto superior" (ponto inferior) e o segmento retilíneo de $\gamma_1' \cup \gamma_2'$ que o contém será chamado "ramo superior" (ramo inferior).

Deixando fixo γ_1' e deslocando γ_2' na direção u encontrada, digamos no sentido das cotas crescentes em relação ao plano da projeção, só vão se interceptar os ramos retilíneos de $\gamma_1' \cup \gamma_2'$. Um ramo inferior de γ_2' encontrará um ramo superior de γ_1' , correspondente ao mesmo ponto duplo de K' , em apenas um ponto e depois de um número finito de cruzamentos os dois nós ficarão completamente separados.

Denotemos com γ_2'' o nó γ_2' deslocado, isto é, completamente separado de $\gamma_1' = H_1(\gamma_1)$ e com γ_2^t o nó γ_2' nas diversas posições de seu deslocamento.

Admitamos que para estes dois nós, γ_1' e γ_2'' , completamente separados, exista aplicação diferenciável

$$g: S^3 \rightarrow S^2$$

tal que $g^{-1}(a_1) = \gamma_1'$ e $g^{-1}(a_2) = \gamma_2''$, a_1 e a_2 valores regulares de g .

Vamos sujeitar, agora, os nossos nós a deformações, por meio de difeomorfismos de S^3 sobre si mesmos, e às "curvas desvios" descritas no Cap. III, § 11. Observemos, ainda, que no processo que se segue, sempre que nós deformamos as curvas de uma forma para outra, a existência de uma função $g: S^3 \rightarrow S^2$, no estágio inicial da deformação implica na correspondente existência da função $g': S^3 \rightarrow S^2$ no estágio final.

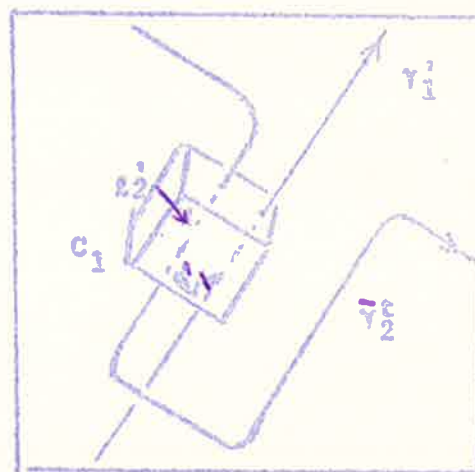
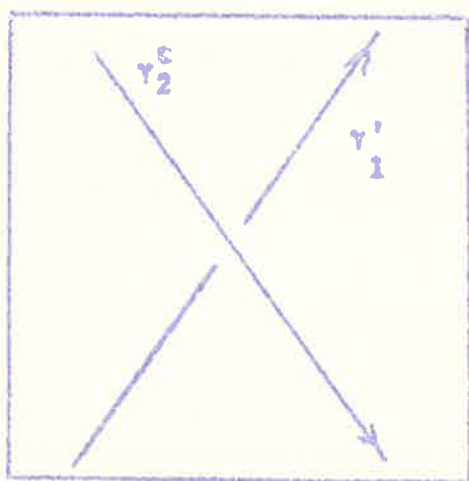
1º passo : Deslocaremos o nó γ_2'' na direção $\underline{u}$ encontrada, mas no sentido contrário ao que fizemos acima, isto é, no sentido das cotas decrescentes em relação ao plano da projeção, até que, num particular cruzamento, um "ramo superior" de γ_2^t fique suficientemente próximo de um "ramo inferior" de γ_1' , neste cruzamento.

2º passo : Seja A um prisma retangular indefinido, paralelo à direção $\underline{u}$, e $B \subset A$ um prisma defi

nido contendo somente trechos retilíneos desta cruzamento.

Por um difeomorfismo de S^3 sobre si mesmo que é a identidade sobre uma vizinhança tubular de γ_1' e fora de A , de-
formamos γ_2^t em $\bar{\gamma}_2^t$, como mostra a figura abaixo, à direita,
o qual coloca um pequeno trecho, ℓ_2' , retilíneo e paralelo ao
correspondente ramo de γ_1' .

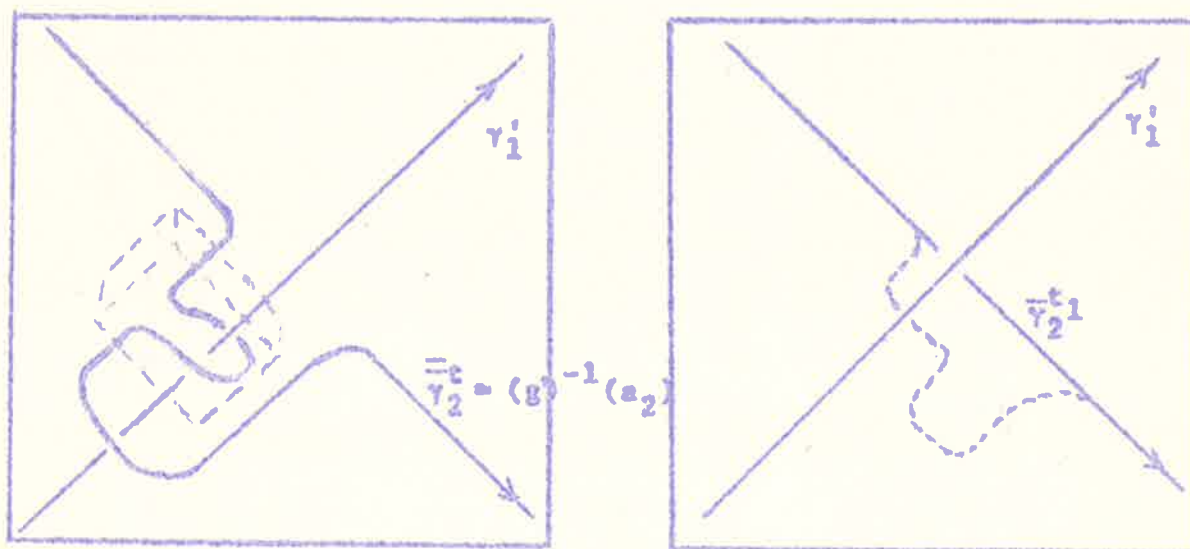
Contendo estes trechos retilíneos, consideremos um
pequeno cubo $C_1 \subset B$.



3º passo : Como estes nós estão nas condições para a-
plicar a "operação desvio" descrita no
Cap. III, § 11, a partir de g poderemos determinar uma aplica-
ção diferenciável

$$g': S^3 \rightarrow S^2$$

tal que as imagens inversas dos pontos a_1 são as curvas γ_1' e $\bar{\gamma}_2^t$, esta obtida de $\bar{\gamma}_2^t$ com a "operação desvio", de modo que as novas curvas apareçam agora entrelaçadas.



4º passo : Depois de efetuado o desvio, o nó $\bar{\gamma}_2^t$ apresentará dois "over-crossing" consecutivos em relação a γ_1' (fig. acima, à esquerda). Deformamos, então, $\bar{\gamma}_2^t$ de modo a eliminar estes dois "over-crossing", e avançamos um pouco mais na direção u , até um nível inferior que possibilite tornar retilíneo novamente este ramo, como se fôsse a imagem do ramo de $\bar{\gamma}_2^t$ atravessado o cruzamento, obtendo $\bar{\gamma}_2^{t1}$ como indica a figura acima, à direita.

3º passo : Prosseguindo sempre na direção u e repetindo a operação dentro de cada prisma in definido, e para cada cruzamento, depois de um número finito de operações desta natureza, chegaremos a menos de um difeomorfismo de S^3 sobre si mesmo à posição dos dois nós dados, γ_1 e γ_2 e à aplicação diferenciável

$$f:S^3 \rightarrow S^2$$

tal que $f^{-1}(a_i) = \gamma_i$ ($i=1,2$), a_i valor regular de f , e o Teorema Principal fica assim demonstrado a menos da existência da aplicação diferenciável

$$g:S^3 \rightarrow S^2$$

citada acima, tal que $g^{-1}(a_1) = \gamma_1'$ e $g^{-1}(a_2) = \gamma_2''$ separados, a_i valor regular de g .

Considerando, agora, um "ramo superior" e um "ramo inferior" do mesmo nó, γ_1' ou γ_2'' (estes estão separados), aplicamos em cada um deles as operações semelhantes às descritas acima (utilizando também operações desvio), um número de vezes suficiente para torná-los triviais, denotando-os então com $\bar{\gamma}_1$ e $\bar{\gamma}_2$.

Como as deformações se passam sempre dentro de cilindros disjuntos, elas podem ser feitas simultaneamente nos diversos cruzamentos.

Seja, agora, um difeomorfismo

$$\psi: S^3 \rightarrow S^3$$

de S^3 sobre si mesmo, isotópica à identidade, que leva os nós triviais $\bar{\gamma}_1$ e $\bar{\gamma}_2$ em circunferências planas, separadas, $\tilde{\gamma}_1$ e $\tilde{\gamma}_2$.

Mas para duas circunferências planas separadas, vimos no Cap. II, § 2, que existe aplicação diferenciável $\tilde{f}: S^3 \rightarrow S^2$ tal que $\tilde{f}^{-1}(a_1) = \tilde{\gamma}_1$, a_1 valor regular de $\tilde{f}$.

A aplicação composta

$$\bar{f} = \tilde{f} \circ \psi : S^3 \rightarrow S^2$$

é uma aplicação diferenciável tal que $(\bar{f})^{-1}(a_1) = \bar{\gamma}_1$, a_1 valor regular de $\bar{f}$.

Então, a partir de $\bar{f}$, com as operações descritas acima, feitas no sentido contrário, depois de um número finito de passos chegaremos à aplicação

$$g: S^3 \rightarrow S^2$$

e daí à aplicação diferenciável

$$f: S^3 \rightarrow S^2$$

com $f^{-1}(a_1) = \gamma_1$, a_1 valor regular de f , sendo γ dois nós quaisquer, triviais ou não, separados ou não, regularmente imersos em S^3 , ficando assim demonstrado o Teorema Principal enunciado no início deste capítulo.

§ 3 - Observações

1) Este teorema ainda é válido se cada

$$\gamma_i = \bigcup_j \gamma_{ij} \quad (i=1,2; j=1,\dots,\alpha_i)$$

é uma reunião de α_i nós quaisquer, regularmente imersos em S^3 .

2) Para três ou mais pontos $a_i \in S^2$, as imagens inversas devem ser nós prefixados regularmente imersos em S^3 , sujeitos ao invariante de Hopf e a solução do problema deverá ter características diferentes. Este problema será um dos objetos dentro da minha pesquisa futura.

A P Ê N D I C E

§ 1 - Homotopia de laços em $\tilde{B}_1$

Para demonstrar que existe a homotopia

$$k_t: S^1, p_0 \rightarrow \tilde{E}_1, P_1 \quad (0 \leq t \leq 1)$$

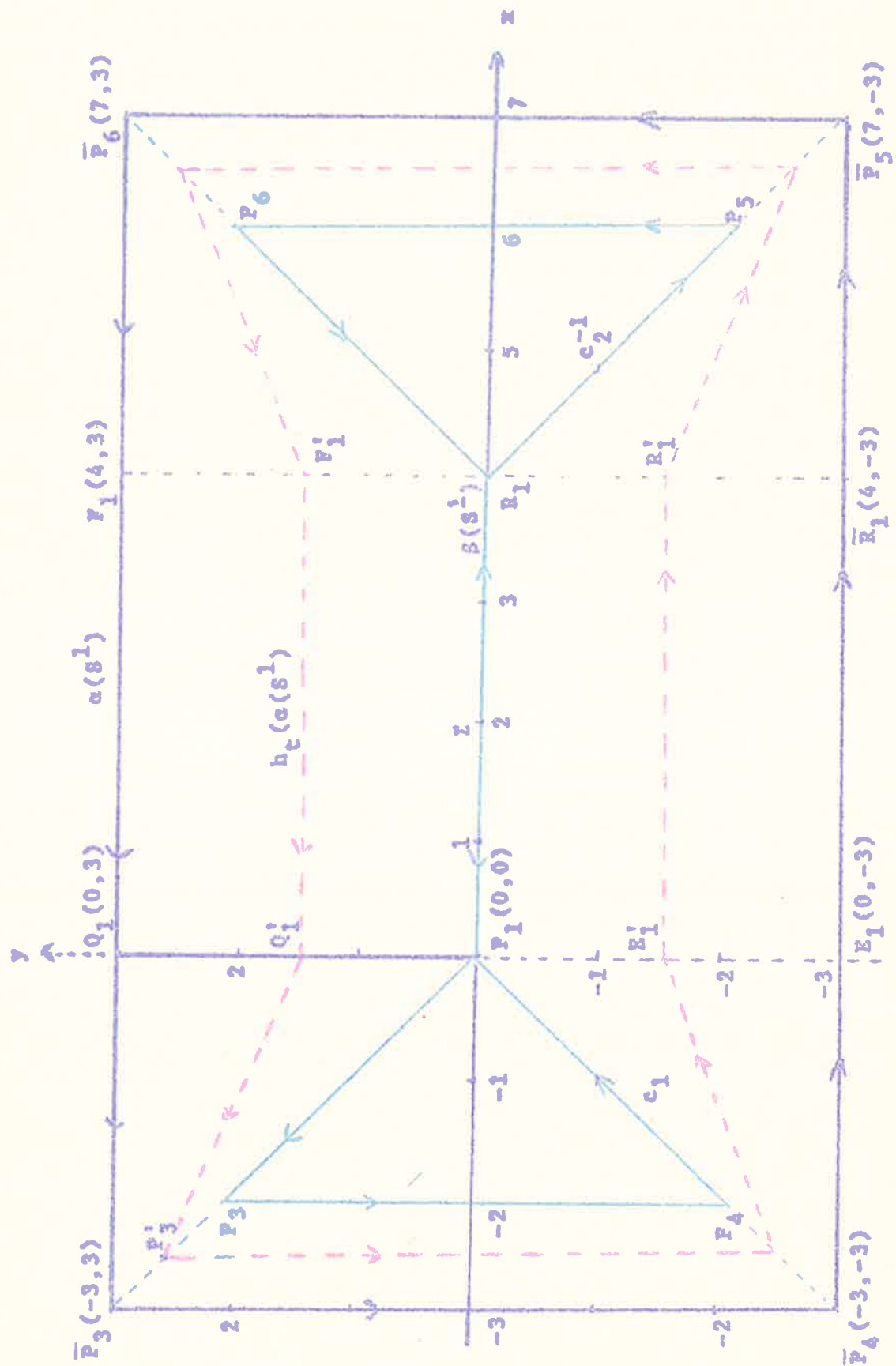
tal que $k_0 = \alpha$ e $k_1 = \beta$, citada no Capítulo III, § 4, consideremos, por questão de simplicidade, uma configuração I'_4 , em R^2 , homeomorfa àquela, I_4 , que aparece na tampa superior do cubo C_1 . Aqui utilizaremos as mesmas notações usadas lá e obteremos a homotopia desejada utilizando-nos de transformações afins que levam $\alpha(S^1) \subset R^2$ em $\beta(S^1) \subset R^2$.

Sejam, então, os laços, em R^2 , com ponto base P_1 (veja de figura na página seguinte)

$$\alpha, \beta: S^1, p_0 \rightarrow R^2, P_1$$

onde $\alpha(S^1) = P_1 Q_1 \bar{P}_3 \bar{P}_4 \bar{E}_1 \bar{R}_1 \bar{P}_5 \bar{P}_6 P_1 Q_1 P_1$ e $\beta(S^1) = P_1 c_1 P_1 R_1 c_2^{-1} R_1 P_1$

Na figura abaixo as circunferências c_1 e c_2 estão representadas pelos triláteros orientados $P_1 P_3 P_4$ e $R_1 P_6 P_5$, respectivamente, sendo $P_1 = (0,0)$, $P_3 = (-2,2)$, $P_4 = (-2,-2)$, $R_1 = (4,0)$, $P_5 = (6,-2)$ e $P_6 = (6,2)$.



Construiremos, primeiramente, uma homotopia

$$h_t: \alpha(S^1) \rightarrow R^2$$

tal que

$$h_0(\alpha(S^1)) = \alpha(S^1) \quad (h_0 = \text{identidade})$$

e

$$h_1(\alpha(S^1)) = \beta(S^1)$$

Em consequência,

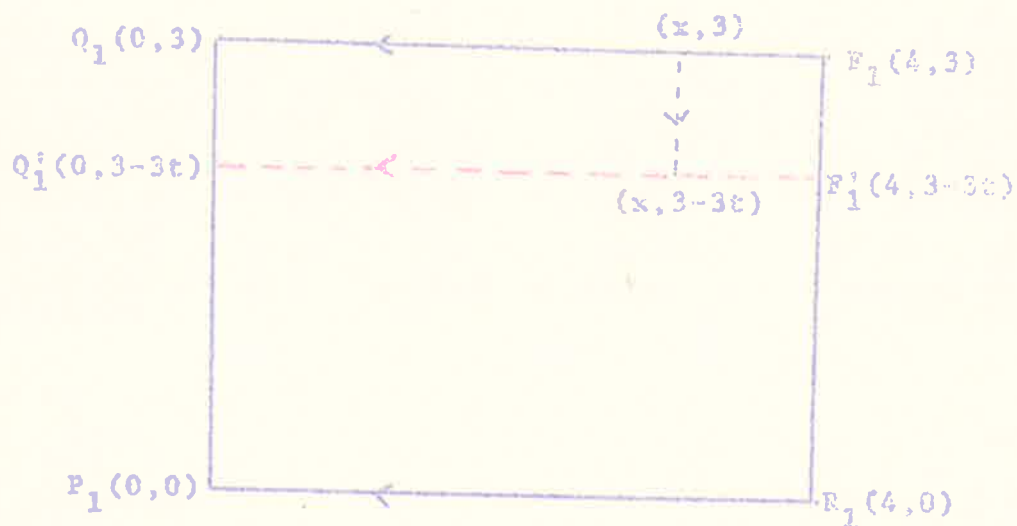
$$k_t = h_t \circ \alpha: S^1, p_0 \rightarrow R^2, p_1$$

é uma homotopia tal que

$$k_0 = h_0 \circ \alpha = \alpha \quad \text{e} \quad k_1 = h_1 \circ \alpha = \beta$$

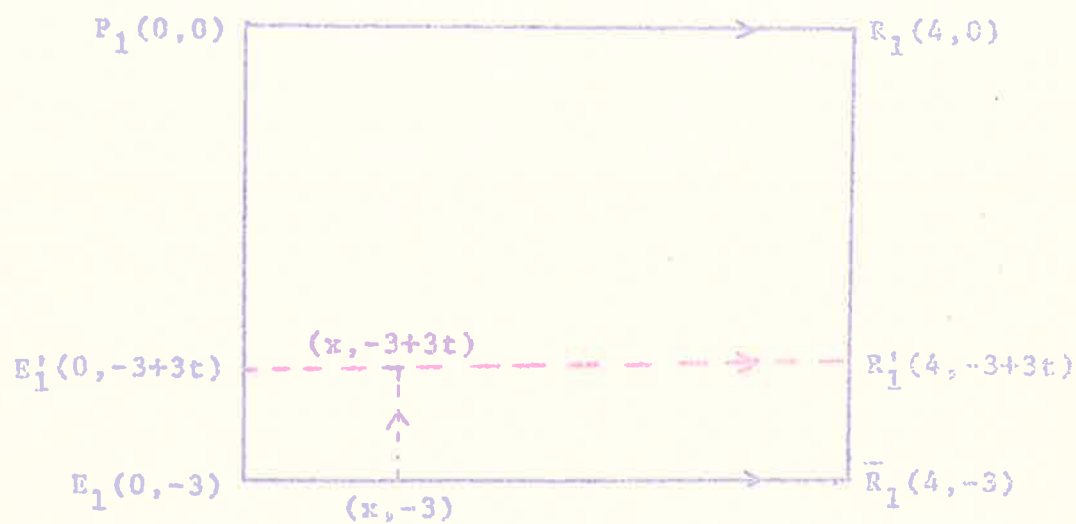
1.1 - Construção da homotopia $h_t: \alpha(S^1) \rightarrow R^2$ que de-
forma continuamente $\alpha(S^1)$ em $\beta(S^1)$

1º) Sobre $F_1 Q_1$, h_t será definida como a translação
paralela segundo o vetor $(0, -3t)$:



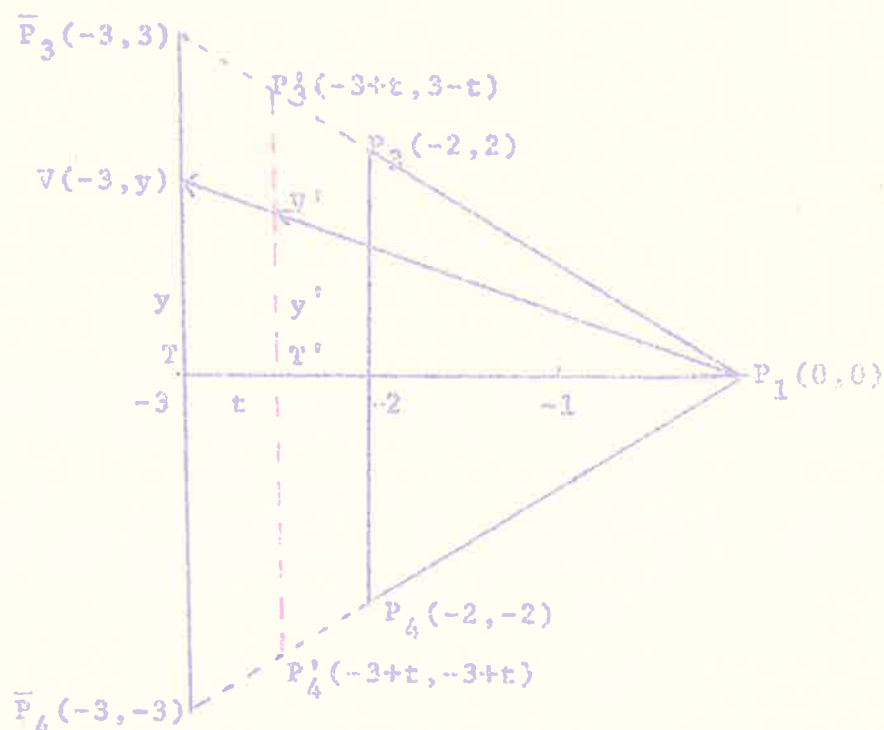
$$h_t(x, 3) = (x, 3 - 3t) \quad , \quad 0 \leq x \leq 4 \quad , \quad 0 \leq t \leq 1$$

29) Sobre $E_1 \bar{R}_1$, h_t será definida como a translação segundo o vetor $(0, 3t)$:



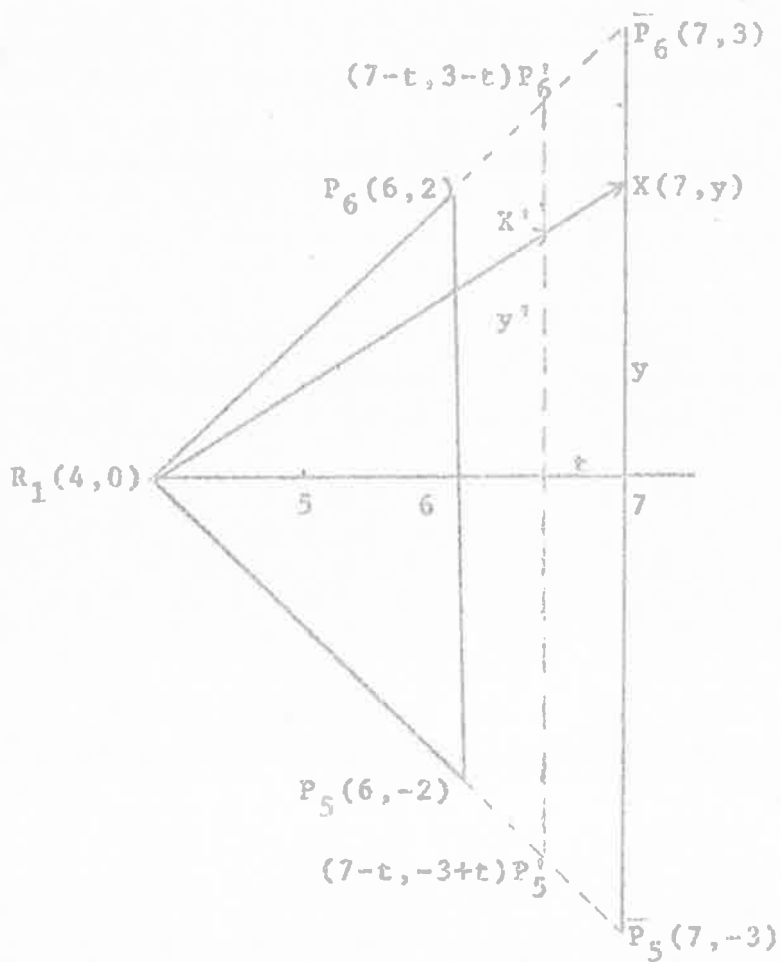
$$h_t(x, -3) = (x, -3 + 3t) \quad , \quad 0 \leq x \leq 4 \quad , \quad 0 \leq t \leq 1$$

- 39) Sobre $\bar{P}_3\bar{P}_4$, h_t será definida como a transformação linear que encurta cada vetor $V(-3,y)$ no vetor $V'(-3+t,y')$. Da semelhança dos triângulos P_1VT e $P_1V'T'$ vem $y' = (1 - \frac{t}{3})y$.



$$h_t(-3,y) = (-3+t, (1 - \frac{t}{3})y) \quad -3 \leq y \leq 3$$

- 40) Sobre $\bar{P}_5\bar{P}_6$, h_t será definida de modo análogo ao
mo acima, isto é, de modo que cada ponto
 $X(7,y) \rightarrow X'(7-t,y')$. Da semelhança dos triângu-
los vem $y' = (1 - \frac{t}{3})y$.



$$h_t(7, y) = (7-t, (1 - \frac{t}{3})y) \quad , \quad -3 \leq y \leq 3$$

59) Sobre $Q_1 \bar{P}_3$, h_t será definida como a restrição, a este segmento, da transformação afim T_t que, em cada estágio t , leva o triângulo $P_1 \bar{P}_3 Q_1$ no triângulo $P_1 P_3' Q_1'$.

$$T_t: \begin{cases} \bar{x} = (1 - \frac{t}{3}) x \\ \bar{y} = -\frac{2t}{3} x + (1-t) y \end{cases}$$

Portanto, sobre o segmento $Q_1\bar{P}_3$, onde $y = 3$, defini-

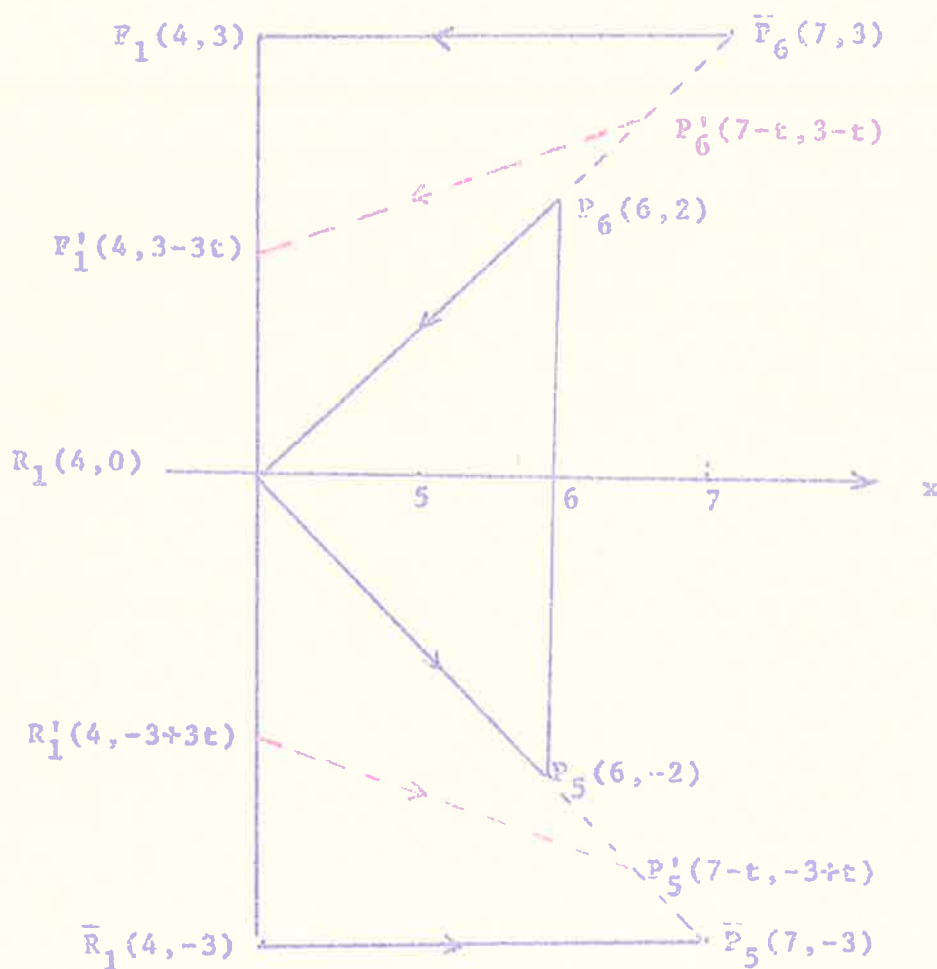
mos:

$$h_t(x, 3) = ((1 - \frac{t}{3}) x, -\frac{2t}{3} x + 3 - 3t), \quad -3 \leq x \leq 0$$

6º) Sobre $\bar{P}_4E_1$, h_t será obtida, a partir da definição anterior, por simetria em relação ao eixo dos x :

$$h_t(x, -3) = ((1 - \frac{t}{3}) x, \frac{2t}{3} x - 3 + 3t), \quad -3 \leq x \leq 0$$

7º) Sobre $\bar{P}_6F_1$, h_t será definida como a restrição, a este segmento, da transformação afim que, em cada estágio t , leva o triângulo $R_1\bar{P}_6F_1$ no triângulo $R_1P'_6F'_1$:



$$h_t(x, 3) = \left(\left(1 - \frac{t}{3}\right) x + \frac{4t}{3}, \frac{2t}{3} x + 3 - \frac{17t}{3} \right),$$

$$4 \leq x \leq 7$$

89) Sobre $\bar{R}_1\bar{P}_5$, h_t será obtida da expressão anterior por simetria em relação ao eixo dos x :

$$h_t(x, -3) = \left(\left(1 - \frac{t}{3}\right) x + \frac{4t}{3}, -\frac{2t}{3} x - 3 + \frac{17t}{3} \right),$$

$$4 \leq x \leq 7$$

§ 2 - Nós e projeções de nós ([1], pgs. 1 a 7)

2.1 - Definição: K é um nó se existe um homeomorfismo do círculo unitário C em $\mathbb{R}^3$ cuja imagem é K .

2.2 - Definição: Dois nós K_1 e K_2 são equivalentes se existe um homeomorfismo de $\mathbb{R}^3$ sobre $\mathbb{R}^3$ que leva K_1 sobre K_2 .

2.3 - Definição: Um nó em $\mathbb{R}^3$ diz-se trivial se é equivalente ao círculo $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$.

2.4 - Definição: Um nó diz-se poligonal se a união de um número finito de segmentos de reta chamados arestas cujos extremos são os vértices do nó.

2.5 - Definição: Um nó é "tame" se é equivalente a um nó poligonal.

2.6 - Projeção de um nó

Consideremos a projeção paralela

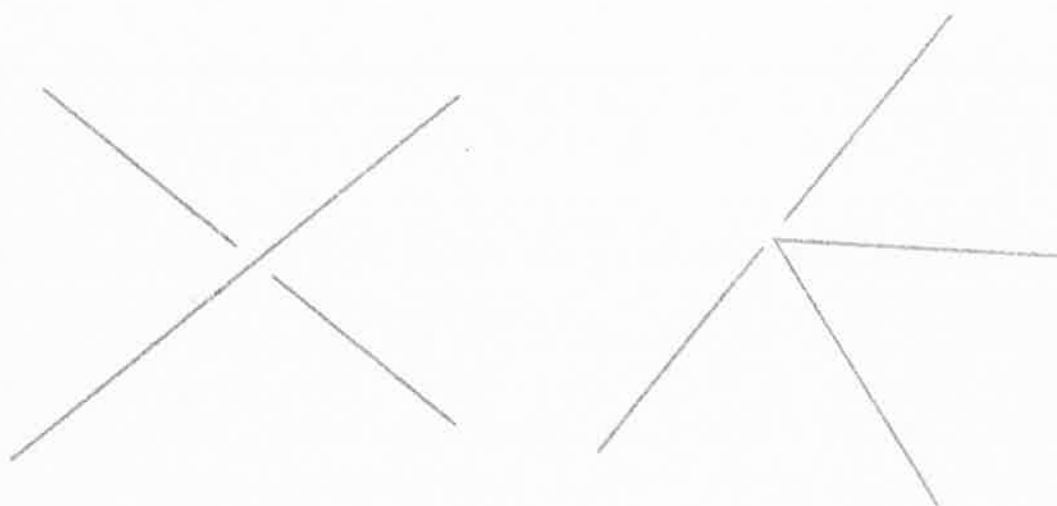
$$\Pi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

definida por $\Pi(x,y,z) = (x,y,0)$. Um ponto $p \in \Pi K$ é chamado um ponto múltiplo se a imagem inversa $\Pi^{-1}(p)$ contém mais do que um ponto de K . A ordem de $p \in \Pi K$ é a cardinalidade de $(\Pi^{-1}(p) \cap K)$.

2.7 - Definição: Um nó K está em posição regular se

- (i) os únicos pontos múltiplos de K são pontos duplos e existe apenas um número finito deles;
- (ii) nenhum ponto duplo é imagem de um vértice de K .

A segunda condição assegura que cada ponto duplo apresenta um efetivo cruzamento, como indica a figura abaixo à esquerda, e não a da direita.



2.8 - Teorema: Um nó poligonal K é equivalente, por uma rotação arbitrariamente pequena de R^3 , a um nó poligonal em posição regular ((1), pg. 7).

2.9 - Reunião disjunta de nós poligonais em posição regular

O conceito de nó poligonal em posição regular se estende de maneira natural para uma reunião disjunta de nós poligonais, e em relação a uma qualquer projeção paralela de R^3 , sobre um plano, pela origem, perpendicular àquela direção. Ainda, a demonstração do teorema 2.8, acima, dado em (1), pg. 7, vale com as naturais adaptações, para demonstrar o seguinte

2.10 - Teorema: Seja $K = K_1 \cup K_2$ reunião disjunta de dois nós poligonais K_1 e K_2 , em R^3 , entrelaçados ou não. Então existe uma direção em R^3 , em relação à qual K está em posição regular.

Demonstração: Consideremos R^3 como subconjunto de um espaço projetivo real P^3 . Associe-mos a cada projeção paralela o ponto de intersecção de uma reta paralela à direção da projeção com o plano projetivo P^2 no infinito. Esta correspondência é biunívoca e sobre.

Consideremos, em primeiro lugar, o conjunto de tô-

das as retas que unem um vértice de $K = K_1 \cup K_2$ a uma aresta de K . Essas retas interceptam P^2 em um número finito de segmentos de reta cuja união indicaremos por Q_1 . Uma projeção correspondente a um ponto de $P^2 - Q_1$ satisfaz a condição (11) da definição de posição regular. Além disso, tem-se no máximo um número finito de pontos múltiplos e nenhum deles é de ordem infinita. Procuremos, agora, eliminar os pontos de ordem $n \geq 3$.

Para isso, consideremos uma terna de retas, duas e duas reversas, cada uma contendo uma aresta de K . O lugar de todas as retas que interceptam esta terna é uma superfície quádrlica a qual intercepta P^2 em uma secção cônica. Seja Q_2 a união de todas tais cônicas. É claro que existe apenas um número finito delas e que o conjunto $Q_1 \cup Q_2$ é nunca denso em P^2 . Então, a imagem de K por uma projeção que corresponde a um ponto de $P^2 - (Q_1 \cup Q_2)$ não tem ponto múltiplo de ordem $n \geq 3$.

§ 3 - Vizinhança tubular em uma variedade M^n de uma subvariedade $M_1^n \subset M^n$

Seja M uma variedade Riemanniana conexa e I um intervalo de números reais.

3.1 - Definição: Um caminho parametrizado

$$\gamma: I \rightarrow M$$

é chamado uma geodésica se o campo de vetores aceleração

$$\frac{D}{dt} \frac{d\gamma}{dt}$$

é idênticamente nulo ([12 A], pg. 46).

Então o campo de vetores velocidade $\frac{d\gamma}{dt}$ deve ser paralelo ao longo de γ . Se γ é uma geodésica, então de ([12 A] Lema 8.3, pg. 47, segue-se a identidade

$$\frac{d}{dt} \left\langle \frac{d\gamma}{dt}, \frac{d\gamma}{dt} \right\rangle = 2 \left\langle \frac{D}{dt} \frac{d\gamma}{dt}, \frac{d\gamma}{dt} \right\rangle = 0$$

o que mostra que o comprimento

$$\left\| \frac{d\gamma}{dt} \right\| = \left\langle \frac{d\gamma}{dt}, \frac{d\gamma}{dt} \right\rangle^{1/2}$$

do vetor velocidade é constante ao longo de γ .

Introduzindo a função comprimento de arco

$$s(t) = \int \left\| \frac{d\gamma}{dt} \right\| dt + \text{constante}$$

vê-se que o parâmetro t ao longo de uma geodésica é uma função linear do comprimento de arco e é igual ao comprimento de arco se e somente se $\left\| \frac{d\gamma}{dt} \right\| = 1$.

3.2 - Lema 10.2: ([12 A], pg. 56)

Para cada ponto p_0 sobre uma variedade Riemanniana M existe uma vizinhança U de p_0 e um número $\epsilon > 0$ tal que: para cada $p \in U$ e cada vetor tangente $v \in M_p$ com comprimento menor do que ϵ existe uma única geodésica

$$\gamma_v: (-2, 2) \rightarrow M$$

satisfazendo as condições

$$\gamma_v(0) = p, \quad \frac{d\gamma_v}{dt}(0) = v$$

3.3 - A aplicação exponencial

Seja $v \in M_q$ um vetor tangente e suponhamos que exista uma geodésica

$$\gamma: [0, 1] \rightarrow M$$

satisfazendo

$$\gamma(0) = q, \quad \frac{d\gamma}{dt}(0) = v$$

Então o ponto $\gamma(1) \in M$ será denotado por

$$\exp_q(v)$$

e chamado a exponencial do vetor tangente.

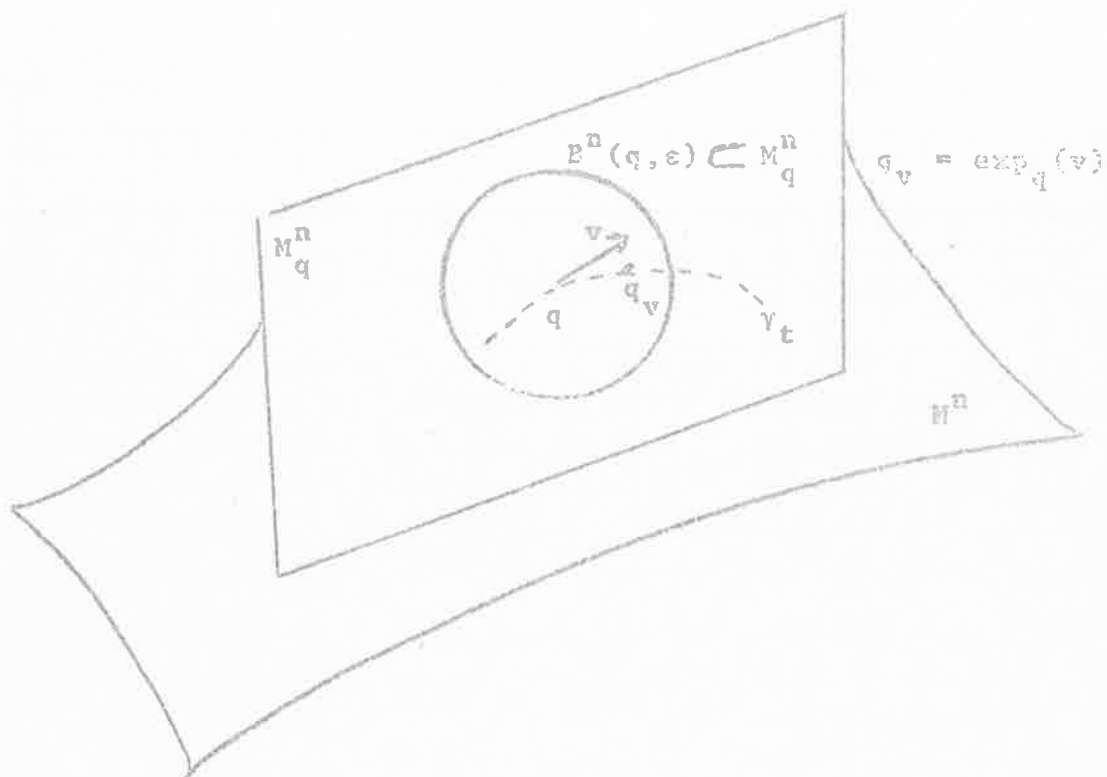
A geodésica pode ser então, descrita por

$$\gamma(t) = \exp_q(tv)$$

e notemos que $\text{arc}(q, \exp_q(v)) = ||v||$.

Pelo Lema 10.2 acima, $\exp_q(v)$ é definida desde que $||v||$ é suficiente pequeno:

$$\exp_q: B^n(q, \varepsilon) \subset M_q^n \rightarrow M^n$$



Seja $\tau(M)$ o espaço total do fibrado tangente a M^n .

$$\tau(M) = \{(p, v) \mid p \in M^n, v \in T_p^n\}$$

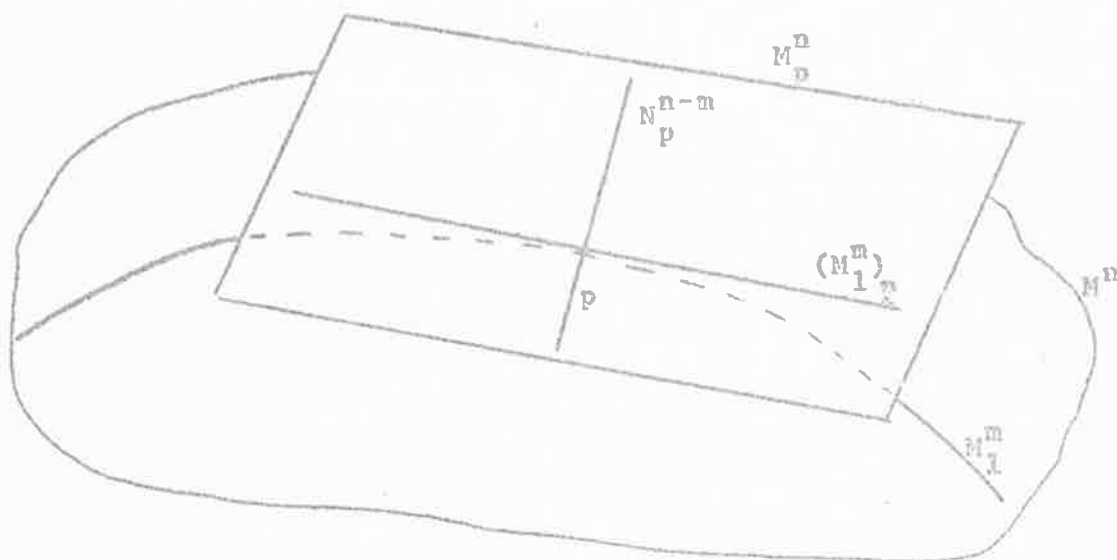
O Lema 10.2 acima, diz que para cada $p \in M$ a aplicação

$$(q, v) \mapsto \exp_q(v)$$

é definida em uma vizinhança Ω do ponto $(p, 0) \in \tau(M)$. Além disso, de (12 A), Teorema 10.1, pg. 56, segue-se que esta aplicação é diferenciável em Ω .

3.4 - Seja M_1^m subvariedade compacta de M^n e consideremos a imersão

$$\tau(M_1^m) \subset \tau(M^n)$$



Em cada ponto $p \in M_1^m$ tomemos $N_p^{n-m} \subset M_p^n$, N_p o complemento ortogonal de $(M_1^m)_p$ em M_p^n . A reunião dos N_p constitui o espaço total $v(M_1^m)$ do fibrado normal, $v(j)$, da imersão $j: M_1^m \rightarrow M^n$ na métrica Riemanniana prefixada. Portanto,

$$v(M_1^m) = \{(p, v) \mid p \in M_1^m, v \in N_p\} \subset \tau(M^n)$$

$v(M_1^m)$ é subvariedade de $\tau(M^n)$, de dimensão n e

$$M_p^n = (M_1^m)_p + N_p^{n-m}$$

Uma vizinhança de $(p, 0) \in v(M_1^m)$ é dada por $V_1 \times B_{(p, \varepsilon)}^{n-m}$ isto é, por pares (q, v) tal que $q \in V_1$, vizinhança de p em M_1^m e $v \in N_p^{n-m}$ com $\|v\| < \varepsilon$.

Consideremos a aplicação diferenciável

$$\exp: v(M_1^m) \rightarrow M^n$$

definida por

$$\exp(q, v) = \exp_q(v)$$

numa conveniente vizinhança $V_1 \times B_{(p, \varepsilon)}^{n-m}$ de $(p, 0) \in v(M_1^m)$.

Seja $\tau(v(M_1^m))$ o espaço total do fibrado tangente a $v(M_1^m)$ e consideremos a fibra (n -dimensional) $(v(M_1^m))_{(p, 0)}$ e mostremos que

$$\exp_*: (v(M_1^m))_{(p,0)} \rightarrow M_p$$

é não singular.

Consideremos uma base de M_p^n da forma

$$(\alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta_1, \dots, \beta_{n-m})$$

onde os vetores α_i , tangentes a V_1 , constituem uma base de $(M_1^m)_p$ e os vetores β_j , constituem uma base de N_p^{n-m} .

Uma base $(\bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_m, \bar{\beta}_1, \dots, \bar{\beta}_{n-m})$ do espaço tangente $(v(M_1^m))_{(p,0)}$ é obtida da seguinte maneira:

Associamos a cada vetor α_i o vetor correspondente $\bar{\alpha}_i$ considerando M_1^m como a secção nula do fibrado normal $v(M_1^m)$, isto é, se α_i é o vetor tangente à curva $\lambda_i(t) \subset M_1^m$, em $p = \lambda_i(0)$, então $\bar{\alpha}_i$ é o vetor tangente à curva $\bar{\lambda}_i(t) = (\lambda_i(t), 0) \subset v(M_1)$, em $(p, 0)$. A cada vetor β_j associamos o vetor $\bar{\beta}_j$ tangente à curva em $v(M_1^m)$,

$$t \rightarrow t \beta_j \in N_p^{n-m}$$

no ponto $(p, 0)$.

Temos, então,

$$\exp(\bar{\lambda}_i(t)) = \exp(\lambda_i(t), 0) = \lambda_i(t)$$

e, portanto, $\exp_*(\bar{\alpha}_i) = \alpha_i$. Temos também $\exp(t\bar{\beta}_j) = \text{trecho}$

da geodésica em M , tangente a β_j . Então, $\exp_*(\bar{\beta}_j) = \beta_j$, vetor tangente àquela geodésica no ponto p .

Conclusão: $\exp_*$ leva os n vetores $\bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_m, \bar{\beta}_1, \dots, \bar{\beta}_{n-m}$ nos n vetores linearmente independentes

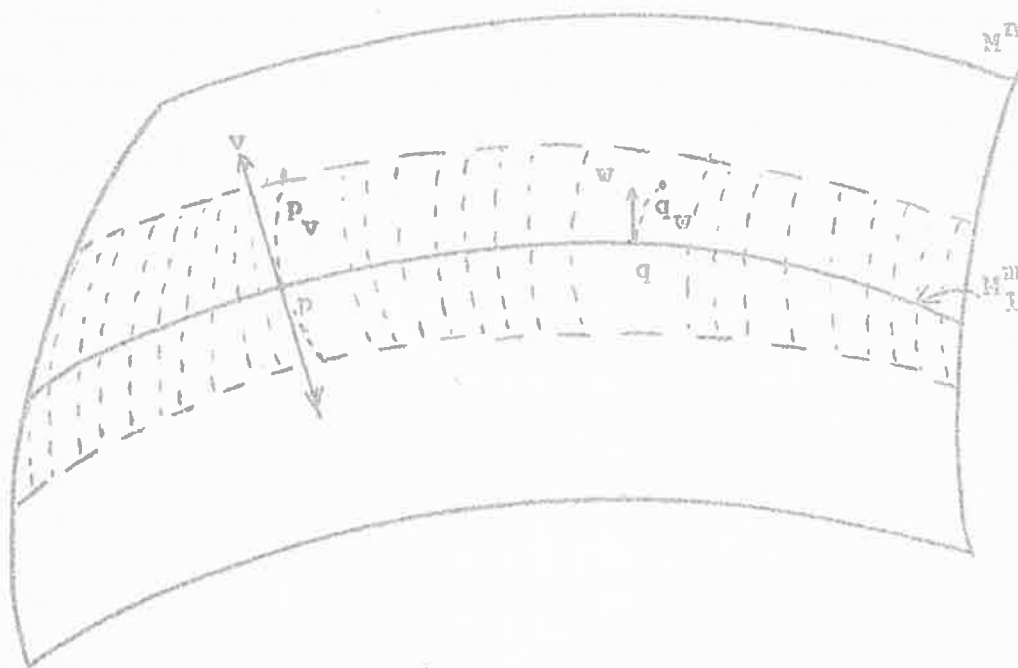
$\alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta_1, \dots, \beta_{n-m}$. Portanto, a matriz jacobiana de

$$\exp: \nu(M_1^m) \rightarrow M^n$$

no ponto $(p, 0)$ é não singular. Logo, leva alguma vizinhança $W_1 \times B^{n-m}(p, \epsilon_1)$ de $(p, 0) \in \nu(M_1^m)$ difeomorficamente sobre uma vizinhança $T_{\epsilon_1}(W_1)$ de $p \in M^n$. Analisemos $T_{\epsilon_1}(W_1)$. Para cada $q \in W_1$, a aplicação

$$\exp_q$$

leva a bola aberta $B^{n-m}(q, \epsilon_1)$ em N_q^{n-m} difeomorficamente sobre um conjunto U_q , reunião de geodésicas em M^n , ortogonais a M_1^m em q (cada segmento normal a M_1^m em q , de comprimento $< \epsilon_1$ é levado difeomorficamente sobre uma geodésica de comprimento $< \epsilon_1$, ortogonal a M_1^m em q). Logo, $T_{\epsilon_1}(W_1) = \bigcup_q U_q$, $q \in W_1$, chamada uma vizinhança tubular de $W_1 = W \cap M_1^m$, em M^n .



Temos $\exp(W_1 \times B^{n-m}(p, \epsilon_1)) = T_{\epsilon_1}(W_1)$.

M_1^m compacta pode ser recoberta por um conjunto finito $\{W_1, \dots, W_g\}$ de vizinhanças nas condições acima. A cada W_i corresponde um $\epsilon_i > 0$ e uma vizinhança tubular $T_{\epsilon_i}(W_i)$, formada pela reunião de geodésicas em M , ortogonais a W_i , de comprimento $< \epsilon_i$ (duas dessas geodésicas com origem em dois pontos distintos de W_i , são disjuntas). Seja $\epsilon > 0$ um número de Lebesgue da cobertura $\{W_i\}$ inferior a todos os ϵ_i . (ϵ é um número de Lebesgue da cobertura $\{W_i\}$, se dois pontos $p, p' \in M_1^m$ distam entre si menos de 2ϵ , então existe um índice j com $p, p' \in W_j$.) Então a reunião das vizinhanças tubulares $T_\epsilon(W_i)$ constitui um conjunto $T_\epsilon(M_1^m) \subset M^n$, aberto em M^n , chamado vizinhança tubular de M_1^m em M^n e é tal que duas geodésicas de

comprimento $< \epsilon$, normais a M_1^m em dois pontos distintos de M_1^m são disjuntas.

3.5 - Definição: Dada M_1^m subvariedade compacta de M^n diremos que uma vizinhança tubular $T_\epsilon(M_1^m)$ de M_1^m , em M^n é equivalente ao espaço produto

$$M_1^m \times B^{n-m}$$

onde B^{n-m} é a bola aberta unitária em R^{n-m} , se existir um difeomorfismo θ de $T_\epsilon(M_1^m)$ sobre $M_1^m \times B^{n-m}$ tal que o diagrama abaixo é comutativo

$$\begin{array}{ccc} T_\epsilon(M_1^m) & \xrightarrow{\theta} & M_1^m \times B^{n-m} \\ \Pi \downarrow & & \downarrow \Pi' \\ M_1^m & \xrightarrow{\text{ident}} & M_1^m \end{array}$$

onde Π é a projeção natural da vizinhança tubular e Π' é a projeção no 1º fator.

Diremos, então, que θ é uma equivalência entre $T_\epsilon(M_1^m)$ e $M_1^m \times B^{n-m}$.

Pelo que vimos em 3.4, acima, cada uma das vizinhanças tubulares $T_\epsilon(W_1)$ é equivalente ao produto cartesiano

$W_1 \times B^{n-m}$. Porém, globalmente, não podemos afirmar que $T_\varepsilon(M_1^m)$ é equivalente a um produto.

§ 4 - Existência de aplicação diferenciável

$F: T_\varepsilon(M_1^m) \rightarrow R^{n-m}$ tal que $F^{-1}(0) = M_1^m$, 0 $\in R^{n-m}$ valor regular de F .

4.1 - Teorema: Seja M_1^m subvariedade compacta de uma variedade Riemanniana M^n . São equivalentes as seguintes proposições:

- 1) Existem $n-m$ campos de vetores normais de classe C^∞ linearmente independentes em M_1^m .
- 2) Para toda vizinhança tubular $T_\varepsilon(M_1^m)$ de M_1^m em M^n existe uma equivalência

$$\theta: T_\varepsilon(M_1^m) \xrightarrow{\sim} M_1^m \times B_\varepsilon^{n-m}$$

a qual é um difeomorfismo de classe C^∞ .

- 3) $M_1^m = F^{-1}(a)$ onde a é valor regular de uma aplicação diferenciável

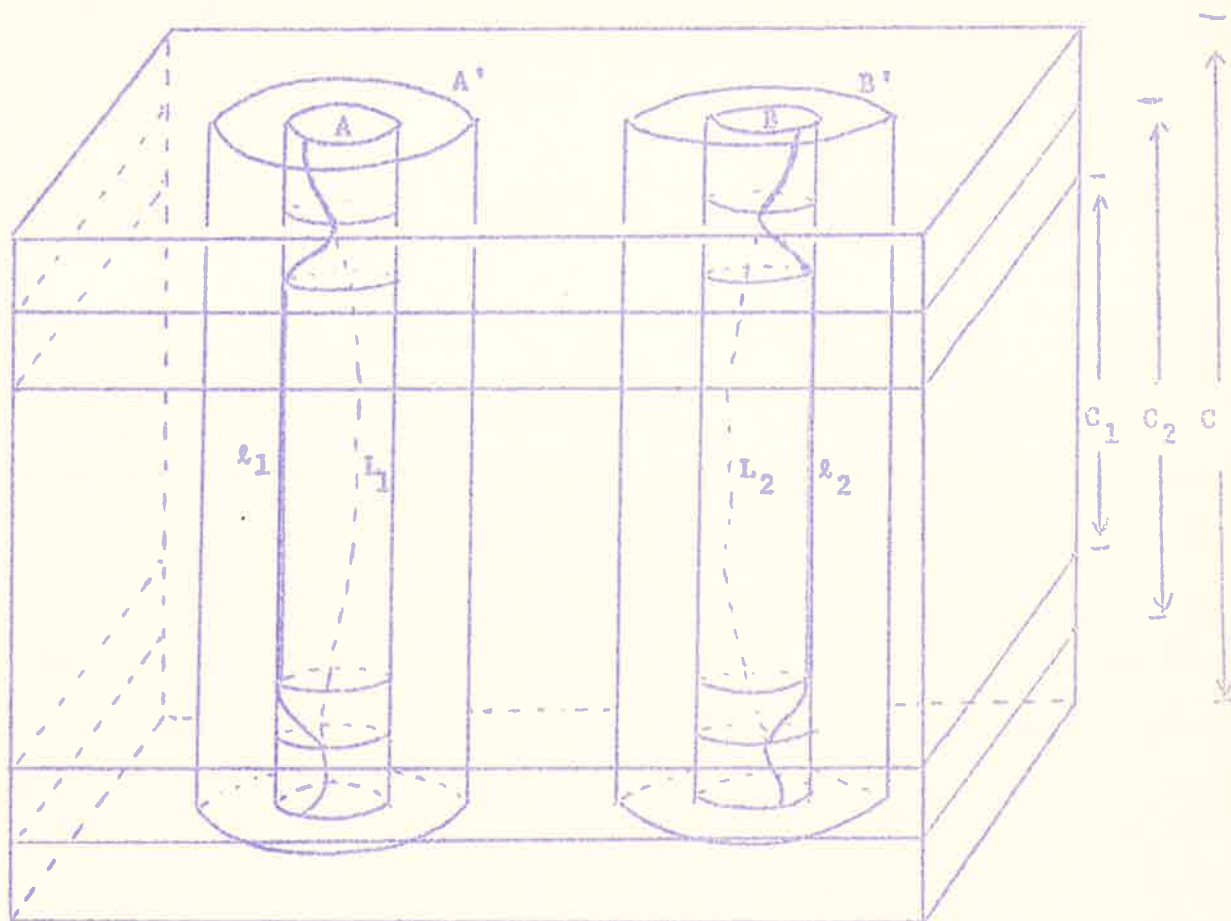
$$F: \Omega \rightarrow R^{n-m}$$

Ω aberto, $M^m \subset \Omega \subset M^n$.

A demonstração segue os mesmos passos de (10), Prop. 10. pg. 83.

§ 5 - Construção do difeomorfismo $\psi:S^3 \rightarrow S^3$ citado no Capítulo III, § 3.

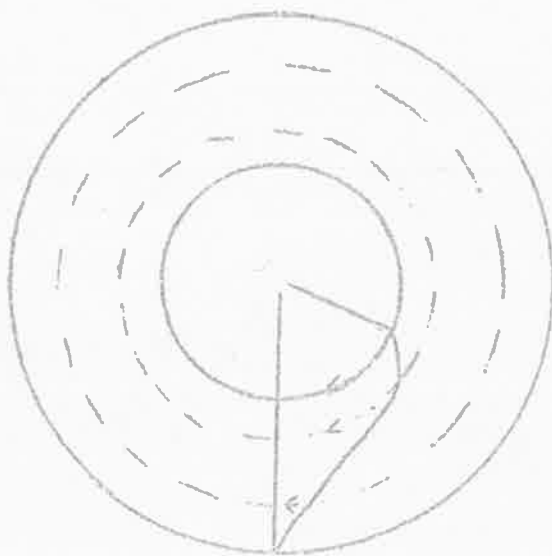
Consideremos os nós γ_1' e γ_2' e os trechos A e B de suas vizinhanças tubulares contidos no cubo C nas condições estipuladas no início do § 3 do Capítulo III e lá representadas na Configuração (I_2) . Consideremos os cilindros A' e B' , contendo A e B, respectivamente, e concêntricos a estes.



Consideremos planos à distância $\epsilon/2$ e ϵ , das tampas superior e inferior do cubo C e seja C_1 (C_2) a parte do cubo C situada entre os planos que estão à distância ϵ ($\epsilon/2$) das faces superior e inferior de C . Pode-se obter um difeomorfismo $\phi: S^3 \rightarrow S^3$ que efetua uma torção nos cilindros A e B , de modo a retificar trechos de $L_1 \cap C$ e $L_2 \cap C$. Esta torção vai se abrandando nos cilindros concêntricos A e B , de dentro para fora, de modo que no fecho de

$$(C - C_2) \cup (C - (A' \cup B')) \cup \text{Fr } C$$

se tenha $\psi = \text{identidade}$.



ψ deixa fixas as partes de L_1 e L_2 que estão à distância $\epsilon/2$ das faces superior e inferior de C . Na faixa seguinte existe em cada disco secção transversal do cilindro A' (B') uma rotação de classe C^∞ que vai se abrandando de dentro para fora até atingir rotação zero na fronteira e de modo que $\ell_1 = \psi(L_1 \cap C_1)$ e $\ell_2 = \psi(L_2 \cap C_1)$ se tornem retilíneos conforme mostra a figura acima.

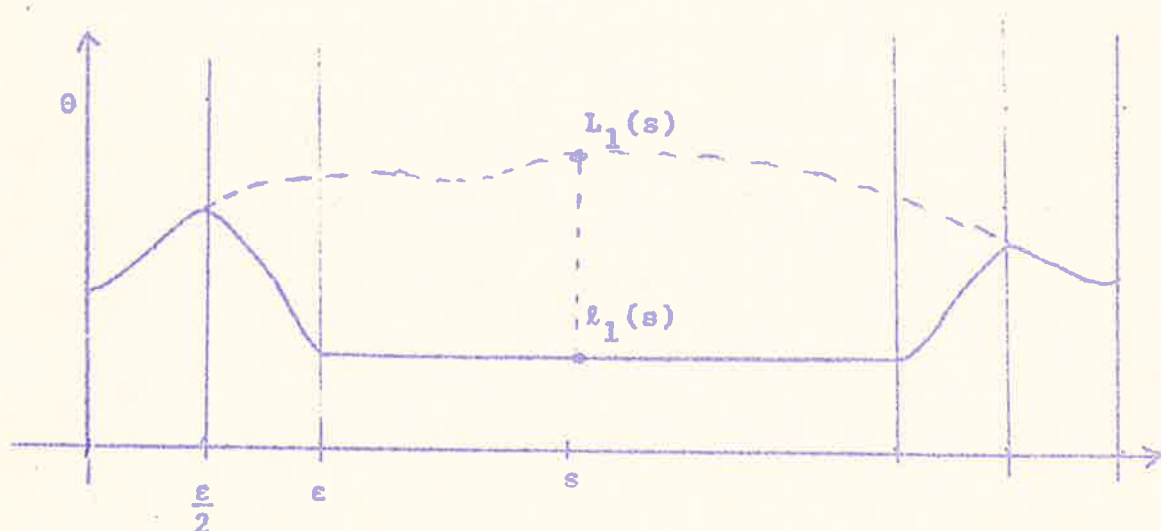
Podemos ver a ação de ψ restrita à superfície lateral do cilindro A no revestimento universal desta superfície.

Levar L_1 diferenciavelmente em uma curva contendo o trecho retilíneo ℓ_1 é equivalente a construir uma homotopia de classe C^∞ que no estágio zero dá L_1 e no estágio 1 dá a curva que contém ℓ_1 retilíneo.

Como $L_1(s)$ e $\ell_1(s)$ são de classe C^∞ a homotopia

$$h_t(s) = t \ell_1(s) + (1 - t) L_1(s)$$

é de classe C^∞ .



BIBLIOGRAFIA

- | 1| Crowell, Richard H. e Fox, Ralph H. - Introduction to Knot Theory. Blaisdell Publ. Co., 1965.
- | 2| Eilenberg and Steenrod - Foundations of Algebraic Topology Princeton University Press, 1952.
- | 3| Fox, R.H. - A Quick Trip Through Knot Theory. Topology of 3-Manifolds and Related Topics. Edited by M. K. Fort, Jr., 1962.
- | 4| Hilton, P.J. - An Introduction to Homotopy Theory. Cambridge, University Press, 1964.
- | 5| Hilton, P.J. and Wylie, S. - Homotopy Theory. Cambridge University Press, 1960.
- | 6| Hopf, Heinz - Über die Abbildungen der dreidimensionalen Sphäre auf die Kugelfläche. Math. Ann. 104, 5, 1931, pg. 637.
- | 7| Hu, Sze-Tsen - Homotopy Theory. Academic Press, N.Y. and London (1959).
- | 8| Loibel, G.F. - Singularidades das Aplicações Diferenciáveis. 6º Colóquio Brasileiro de Matemática.
- | 9| Loibel, G.F. - Introdução à Teoria da Obstrução. 4º Colóquio Brasileiro de Matemática.
- | 9A| Loibel, G.F. - Tópicos de Topologia Diferencial. Notas de curso de pós-graduação. Departamento de Matemática, EESC.
- | 10| Lima, Elon L. - Introdução às Variedades Diferenciáveis. Publicação do Instituto de Matemática do Rio Grande do Sul.
- | 11| Lima, Elon L. - Introdução à Topologia Diferencial. Notas de Matemática nº 23, IMPA, 2a. edição, 1961.

- |12| Milnor, John - Differential Topology. Notes by James Munkres, Princeton University, Fall term, 1958.
- |12A| Milnor, J. - Morse Theory. Annals of Mathematics Studies, 51. Princeton University Press, 1963.
- |13| Spanier, Edwin H. - Algebraic Topology. McGraw Hill Series in Higher Mathematics, 1966.
- |14| Thon, R. - Les Classes Caractéristiques de Pontrjagin. Des Variétés triangulées. Symposium International de Topologia Algebraica no México.
- |15| Steenrod, N. - The Topology of Fibre Bundles. Princeton University Press, 1951.

ÍNDICE

PREFÁCIO	I
INTRODUÇÃO	II
CAPÍTULO 0 - Noções básicas	1
CAPÍTULO I - Aplicações diferenciáveis de variedades em variedades com certas anteimagens dadas	7
CAPÍTULO II - Aplicações de S^3 em S^2	21
CAPÍTULO III - A operação desvio	35
CAPÍTULO IV - Aplicações de S^3 em S^2 no caso de nós en- treçados	66
APÊNDICE -	80
BIBLIOGRAFIA	106