



INSTITUTO DE CIÊNCIAS MATEMÁTICAS DE SÃO CARLOS

I.C.M.S.C.

C^{ℓ} -DETERMINAÇÃO FINITA E APLICAÇÕES

Grupo de Singularidades
ICMC - USP

Maria Aparecida Soares Ruas

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

SÃO CARLOS - SÃO PAULO
BRASIL

C^ℓ -DETERMINAÇÃO FINITA E APLICAÇÕES

**Grupo de Singularidades
ICMC - USP**

Maria Aparecida Soares Ruas

Orientador: Prof. Dr. Luiz Antonio Favaro

Tese apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos, da Universidade de São Paulo, para obtenção do título de Doutor em Ciências (Matemática).

SÃO CARLOS
1983

Ao Gaspar,

A Janaína, José Augusto e Juliana

AGRADECIMENTOS

O incentivo e amizade de meus orientadores Prof. Dr. Terence Gaffney e Prof. Dr. Luiz Antonio Favaro contribuíram decisivamente para a realização deste trabalho.

Ao Prof. Luiz, agradeço as valiosas sugestões e empenho que fizeram com que eu finalmente terminasse este trabalho de longa história.

Ao Prof. Gaffney, orientador durante o período em que fui estudante de pós-graduação no Departamento de Matemática da Brown University, sob cuja orientação desenvolveram-se as idéias desta tese, bem como parte da mesma.

Ao Prof. Dr. Leslie Wilson, pelas sugestões que levaram os resultados do Capítulo III.

Agradeço também:

Aos amigos do extinto Departamento de Matemática da FFCL - Araraquara por terem possibilitado meu afastamento para estagiar na Brown University.

Aos colegas da UNESP - Rio Claro e do ICMSC pelo apoio e amizade.

A Gisele pela paciência, dedicação e pelo ótimo trabalho de datilografia.

Este trabalho foi parcialmente patrocinado pela FAPESP, através de bolsa de pós-graduação junto a Brown University.

ABSTRACT

This work is concerned with the analysis of the conditions for a map-germ to be finitely determined and of the degree of determinacy.

In Chapters II and III, we obtain estimates for the degree of C^r - G -determinacy, where $G = K, R$ and C .

These estimates are exact in many cases, as for instance, in the following proposition:

"Let $f : (R^n, 0) \rightarrow (R^p, 0)$ be given by:

$$\begin{cases} u_i = x_i & i = 1, \dots, p-k \\ y_j = f_j(x_1, \dots, x_{p-k}, x_{p-k+1}, \dots, x_n), & j = 1, \dots, k. \end{cases}$$

where f_j is homogeneous of degree s_j .

If f is G -determined or more generally if $I_G(f)$ is elliptic then f is $s+\ell-1-C^\ell-G$ determined, with $s = \max s_j$."

The groups of interest in Chapters IV and V are A and C^0-A . We obtain relations among tangent spaces to the orbits, and we apply them to problems of topological triviality, modality and normal forms.

The main result in Chapter IV is a sufficient condition for topological triviality, that applies to map-germs not necessarily weighted-homogeneous.

In Chapter V we deal with A -finitely determined germs with the property that the A -orbit is open in the K -orbit. As an application of the results, we obtain the classification of all $f : (R^2, 0) \rightarrow (R^2, 0)$ of type Σ^1 and $\Sigma^{2,0}$, having that property.

ÍNDICE

INTRODUÇÃO	i
CAPÍTULO I	
PRELIMINARES	1
CAPÍTULO II	
C^L -K-DETERMINAÇÃO FINITA	25
CAPÍTULO III	
GRAU DE C^L -DETERMINAÇÃO DE GERMES QUE SATISFAZEM A UMA CONDIÇÃO DE LOJASIEWICZ	61
CAPÍTULO IV	
PROPRIEDADES DO ESPAÇO TANGENTE À A-ÓRBITA	83
CAPÍTULO V	
SOBRE A EXISTÊNCIA DE A-ÓRBITAS ABERTAS EM UMA <u>DA</u> DA K-ÓRBITA	105
BIBLIOGRAFIA	131

INTRODUÇÃO

"The analysis of the conditions for a map-germ to be finitely determined and of the degree of determinacy involves the most important of the local aspects of singularity theory".

C.T.C. Wall [32].

As aplicações estáveis $f : N^n \rightarrow P^p$ tem a propriedade de serem localmente "equivalentes" a um polinômio de grau $\leq p+1$ (Mather [26, IV]).

Para os valores de n e p , para os quais estabilidadade ocorre genericamente, este resultado garante a possibilidade de obtenção de "formas normais", capazes de descrever a geometria das singularidades, nestas dimensões.

Mais geralmente, para uma relação G definida no conjunto dos germes de aplicação C^∞ , $f : (R^n, 0) \rightarrow (R^p, 0)$, diremos que f é r - G -determinado, se a G -classe de equivalência de f contém todos os germes $g : (R^n, 0) \rightarrow (R^p, 0)$, com o mesmo r -jato que f .

As relações de equivalência de maior interesse são aquelas definidas pelas ações dos seguintes grupos:

R = germes de difeomorfismos $h : (R^n, 0) \rightarrow (R^n, 0)$ de classe C^∞ , cuja ação em f , é a composição à direita,

L = germes de difeomorfismos $k : (R^p, 0) \rightarrow (R^p, 0)$, a ação sobre f é a composição à esquerda,

$A = R \times L$, que é o grupo das mudanças de coordenadas nos dois espaços,

C = germes de difeomorfismos $H : (R^n \times R^p, 0 \times 0) \rightarrow (R^n \times R^p, 0 \times 0)$,
que:

- (i) fixam a projeção sobre R^n e
- (ii) preservam o subespaço $R^n \times \{0\}$

H age no gráfico de f em $R^n \times R^p$, isto é,

$$H(x, f(x)) = (x, h_x(f(x)))$$

e

$K = R.C$ (produto semi-direto), é o grupo de contato.

Se os difeomorfismos são de classe C^ℓ ($0 < \ell < \infty$), ou mesmo homeomorfismos ($\ell = 0$), obtemos os grupos C^ℓ -G.

Os fundamentos da Teoria (C^∞) de Determinação Finita foram desenvolvidos por Mather ([26, I a VI]).

Recentemente, T. Gaffney ([10] e [12]) e Du Plessis[8], melhoraram significativamente as estimativas obtidas por Mather, para o grau de determinação.

Todos os resultados obtidos dependem essencialmente de uma analogia entre a ação dos grupos $G = R, L, A, C$ e K sobre o conjunto dos germes C^∞ , e a ação dos grupos de Lie agindo em variedades. Assim, os *espaços tangentes* a esses grupos tem importância fundamental.

Por outro lado, a Teoria de C^ℓ -determinação, $0 \leq \ell < \infty$ (Suficiência de Jatos), com os trabalhos de Kuiper [17], Takens [29], Kuo([18],[19]) e outros, desenvolveu-se com métodos analíticos, sem a utilização explícita dos espaços tangentes.

Neste trabalho, procuramos utilizar a informação contida nos espaços tangentes a G -órbita de f , para obter estimativas para o grau de C^ℓ -G-determinação, $0 \leq \ell \leq \infty$.

Para $0 \leq \ell < \infty$, construímos "campos de vetores controlados", analogamente ao método introduzido por Looijenga e

usado por Damon ([5],[6]), no estudo da trivialidade topológica de desdobramentos de germes quase-homogêneos.

Os problemas a serem resolvidos neste processo, são de dois tipos:

- (i) Obter condições suficientes para que propriedades algébricas do espaço tangente a f , sejam também verificadas para o espaço tangente de todo germe g com o mesmo r -jato que f .
- (ii) Mostrar que os campos de vetores obtidos tem classe C^ℓ .

A análise da condição (i) possibilitou também a obtenção de vários resultados na Teoria C^∞ .

Os Capítulos II e III são dedicados ao estudo da C^ℓ - G -determinação, $G = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ou K .

Os principais resultados do Capítulo II, Teorema 2.7 e Teorema 2.11, sob uma hipótese de K -determinação finita, fornecem estimativas para o grau de C^ℓ - K -determinação, e condições suficientes para a C^0 - K -trivialidade de pequenas deformações de f .

Estes teoremas não utilizam a hipótese de homogeneidade dos germes envolvidos. No entanto, para estes germes, as estimativas obtidas são exatas.

Mais precisamente, temos o seguinte corolário:

"Se $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ é K -finitamente determinado e homogêneo de grau s , então:

- (i) f é $s+\ell-1$ - C^ℓ - K -determinada, $\ell \geq 1$.
- (ii) deformações pequenas de grau s são C^0 - K -triviais.

Como aplicação, obtivemos formas normais para germes K -semi-homogêneos.

No Capítulo III, extendemos os resultados do Capítulo anterior para germes que satisfazem a convenientes condições de Lojasiewicz.

Estes resultados surgiram com o objetivo de corrigir a estimativa para o grau de C^ℓ -G-determinação ($G = R, C$ ou K), enunciada por C.T.C. Wall em [32] (Teorema 8.1). O erro de Wall foi apontado por Leslie Wilson, que foi também quem nos sugeriu a possibilidade de obtenção de estimativas mais precisas.

Como corolário das diversas proposições apresentadas, temos:

"Seja $f : (R^n, 0) \rightarrow (R^p, 0)$ dado por:

$$\begin{cases} u_i = x_i & i = 1, \dots, p-k \\ y_j = f_j(x_1, \dots, x_{p-k}, x_{p-k+1}, \dots, x_n) & j = 1, \dots, k. \end{cases}$$

com f_j homogênea de grau s_j .

Consideremos:

$$N_R(f) = |df_x|_R^2 = \text{soma dos quadrados dos menores } p \times p \text{ de } df_x.$$

$$N_C(f) = |f(x)|^2$$

$$N_K(f) = N_C(f) + N_R(f).$$

Então:

Se $N_G(f)$ satisfaz a uma condição de Lojasiewicz numa vizinhança da origem ($G = R, C$ ou K), f é $(s+\ell-1)$ - C^ℓ -G-determinado, com $s = \max s_j$."

Em particular, o resultado se aplica aos germes G -finitamente determinados.

Os grupos de interesse nos Capítulos IV e V são A e C^0-A .

Foram obtidas relações entre os espaços tangentes às órbitas dos grupos K e A , que permitiram aplicações a problema de trivialidade topológica, modalidade e formas normais.

O Lema 4.9 e a Proposição 4.10 dão condições suficientes para a trivialidade topológica de deformações de um germe A -finitamente determinado. Tais resultados podem ser aplicados a germes que não são quase-homogêneos, para os quais os resultados de Damon ([5],[6]) não se aplicam.

Os resultados do Capítulo V se referem a germes A -finitamente determinados com a propriedade adicional de que a A -órbita é aberta na K -órbita.

Estes germes constituem uma classe bastante ampla, que contém, por exemplo:

- os germes estáveis
- os germes de funções $f : (R^n, 0) \rightarrow (R, 0)$ homogêneos ou quase-homogêneos.
- as famílias de germes de funções de modalidade 1.
- as famílias topologicamente estáveis na fronteira das "boas dimensões".

Os resultados principais são o Teorema 5.1 e a Proposição 5.2 que fornecem um método para a determinação de A -órbitas abertas em uma dada K -órbita.

Como aplicação, obtivemos a classificação dos germes $f : (R^2, 0) \rightarrow (R^2, 0)$ de tipo Σ^1 e $\Sigma^{2,0}$, tais que a A -órbita de f é aberta na K -órbita de f .

CAPÍTULO I

PRELIMINARES

§ 1.1. Definições

Os aspectos básicos da Teoria de Singularidades que dizem respeito ao estudo da *Determinação Finita* estão, atualmente, bastante difundidos.

A referência original é Mather [26,III](1968). Posteriormente, T. Gaffney [10](1975) e A. Du Plessis [8](1980) obtiveram importantes novos resultados.

C.T.C. Wall [32](1981) faz uma exposição completa do desenvolvimento deste assunto nos últimos quinze anos.

As definições e resultados deste capítulo estão, em sua maioria em Du Plessis.

Nosso objetivo é o estudo de *propriedades locais de aplicações diferenciáveis* $f : N^n \rightarrow P^p$, onde N e P são variedades diferenciáveis. Por esta razão, trabalhamos com *germes de aplicação* em um ponto $a \in N$, isto é, classes de equivalências de aplicações que coincidem em alguma vizinhança de $\underline{a}$. Os pontos $\underline{a} \in N$ e $f(\underline{a}) \in P$ são chamados, respectivamente, *fonte* e *meta* do germe. *Notação*: $f : (N, a) \rightarrow (P, f(a))$.

Utilizando convenientes sistemas de coordenadas, consideraremos simplesmente $f : (R^n, 0) \rightarrow (R^p, 0)$, onde f é aplicação diferenciável de classe C^∞ .

Indicaremos por $C(R^n, R^p)$ o conjunto dos germes de aplicação C^∞ , $f : (R^n, 0) \rightarrow (R^p)$. Ou, abreviadamente, por $C(n, p)$. Quando $p = 1$, indicaremos por C_n . $C_0(n, p)$ indi-

cará o conjunto dos germes com a meta fixa: $f(0) = 0$.

C_n é um anel local, com ideal maximal $m_n = \{f: (R^n, 0) \rightarrow R, f(0) = 0\}$.

As propriedades básicas do anel C_n , estão contidas nos lemas abaixo:

Lema 1.1:

$\{x_1, \dots, x_n\}$ representa uma C_n -base para m_n .

Lema 1.2:

Seja $\phi \in C_n$. Então $\phi \in m_n^{r+1} \iff$ todas as derivadas parciais de ϕ , de ordem $\leq r$, se anulam em $x = 0$.

Para qualquer p , $C(n, p)$ pode ser identificado com o C_n -módulo livre de rank p , $(C_n)^p$.

Vários grupos agem em $C_0(n, p)$. Quando dois elementos f, g de $C(n, p)$ estão em uma mesma órbita segundo a ação de um grupo G , diremos que $f \sim_G g$.

Os grupos de interesse neste trabalho são os seguintes:

R = grupo dos germes de difeomorfismos $h: (R^n, 0) \rightarrow (R^n, 0)$.

R é o grupo de mudanças de coordenadas na fonte. Ou seja, $hf = foh^{-1}$.

L = grupo dos germes de difeomorfismos $k: (R^p, 0) \rightarrow (R^p, 0)$ (mudança de coordenadas na meta). A ação é dada por $kf = kof$.

$A = R \times L$, grupo das mudanças de coordenadas locais nos dois espaços.

C = germes em 0 de famílias C^∞ de difeomorfismos de $(R^p, 0)$, parametrizadas por x . Ou equivalentemente, germes de

difeomorfismos $H : (R^n \times R^P, 0)$ que:

(i) preservam a projeção $\pi : R^n \times R^P \rightarrow R^n$, isto é:

$$H(x, y) = (x, h(x, y)).$$

(ii) preservam o subespaço $R^n \times \{0\}$, isto é: $H(x, 0) = (x, 0)$.

Se $\{h_x\}$ é um difeomorfismo de R^P , dependendo de $x \in R^n$, sua ação transforma f na aplicação

$$x \longmapsto h_x(f(x))$$

Equivalentemente, H age no gráfico de f em $R^n \times R^P$.

$K = RC$ (produto semi-direto).

O diagrama comutativo abaixo descreve uma K -equivalência entre f e g .

$$(R^n, 0) \xrightarrow{(id, f)} (R^n \times R^P, 0 \times 0) \xrightarrow{\pi} (R^n, 0)$$

$$\uparrow h$$

$$\uparrow H$$

$$\uparrow h$$

$$(R^n, 0) \xrightarrow{(id, g)} (R^n \times R^P, 0 \times 0) \xrightarrow{\pi} (R^n, 0)$$

O grupo K é denominado *grupo de contato*.

Usaremos a letra G para indicar, sem especificação, um dos grupos R, L, A, C ou K .

A órbita de f sob a ação do grupo G será indicada por $G(f)$.

§ 1.2. Espaços Tangentes

A classe de germes que estudamos é a dos germes que podem ser representados pelo seu polinômio de Taylor de alguma ordem. A linguagem básica envolve os conceitos de *jato de f* e de *germes finitamente determinados*:

Definição 1.3:

Duas aplicações $f, g : (N, a) \rightarrow (P, b)$ tem o mesmo r -jato em a se com respeito a algum sistema de coordenadas, todas as derivadas de f e g em $x = a$ coincidem até ordem r .

Esta noção é independente da escolha dos sistemas de coordenadas.

A classe de equivalência definida pela relação acima é denominada r -jato de f em $x = a$ e a notação usada é: $j^r f(a)$. Quando não há dúvida quanto à fonte do jato, denotaremos simplesmente, $j^r f$.

Definição 1.4:

Um germe $f : (R^n, 0) \rightarrow (R^p, 0)$ é k - G -determinado se o conjunto dos germes com o mesmo k -jato que f está contido na órbita $G(f)$.

Diremos que f é G -finitamente determinado se f é k - G -determinado para algum $k < \infty$.

Observemos que a proposta é a de se estudar a ação de grupos que não são grupos de Lie, sobre conjuntos que não são variedades. Entretanto, é possível seguir o modelo finito e definir objetos que são chamados *espaços tangentes à órbita $G(f)$* no ponto f . Os elementos destes espaços devem ser *direções de defor-*

mação de f , contidas em sua G -órbita. Portanto, tais vetores devem dar para cada x , uma direção $v(x)$ segundo a qual a imagem $f(x)$ deve ser deslocada. (Figura 1.1).

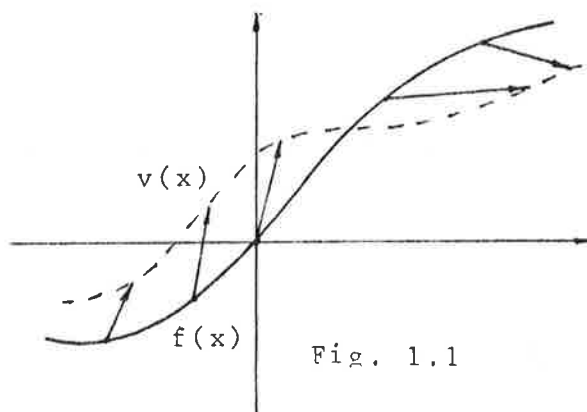


Fig. 1.1

O conjunto de todas as direções de deformação será o "espaço tangente" a $C(n,p)$. Mais precisamente, temos:

Definição 1.5:

Seja $f : (N,a) \rightarrow (P,b)$. Um campo de vetores ao longo de f é um germe $\sigma : (N,a) \rightarrow TP$, tal que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccc}
 & & TP \\
 & \nearrow \sigma & \downarrow \pi_p = \text{projeção} \\
 (N,a) & \xrightarrow{f} & (P,b)
 \end{array}$$

Indicaremos por θ_f o conjunto de todos os campos de vetores ao longo de f .

θ_f é um C_N -módulo livre, de rank p . Em nosso caso, é suficiente considerar $f \in C(n,p)$. Neste caso θ_f se identifica naturalmente com p -uplas de elementos de C_n .

Indiquemos por θ_n o conjunto dos germes de campos de

vetores ao longo da identidade $I_{R^n, 0}$, e por θ_p os campos ao longo da identidade $I_{R^p, 0}$.

θ_n é, naturalmente, um C_n -módulo, e θ_p um C_p -módulo.

Associados a estes módulos, temos os seguintes homomorfismos:

Definição 1.6:

(i) $tf : \theta_n \rightarrow \theta_f$ é definido por:

$tf(\epsilon)_x = df_x(\epsilon_x)$, onde $\epsilon \in \theta_n$ e df_x é a diferencial de f em x .

tf é um homomorfismo de C_n -módulos.

(ii) $wf : \theta_p \rightarrow \theta_f$ é definido por:

$$wf(\eta)_x = \eta \circ f(x)$$

wf é um morfismo sobre f^*

(Se A é um R -módulo, B um S -módulo e $\phi : R \rightarrow S$ um homomorfismo de anéis, então $\phi : A \rightarrow B$ é um morfismo sobre ϕ , se $\phi(\alpha a + \beta b) = \phi(\alpha)\phi(a) + \phi(\beta)\phi(b)$ para todo $\alpha, \beta \in R$, $a, b \in A$).

Para tornar mais precisa a idéia de que θ_f é o espaço tangente a $C(n, p)$, em f precisamos exibir os elementos de θ_f como classes de equivalência de caminhos diferenciáveis em $C(n, p)$.

A definição de caminho dada abaixo é a mais conveniente para as aplicações:

Definição 1.7:

Um *caminho diferenciável* por f , em $C(n,p)$ é o germe de uma aplicação C^∞ , que preserva o nível R ,

$F : (R^n \times R, 0 \times 0) \rightarrow (R^p \times R, 0 \times 0)$, definida por $F(x,t) = (f_t(x), t)$ com $f_0(x) = f(x)$. (observemos que F define o germe de uma família a um parâmetro, de germes de aplicações C^∞ , $\{f_t : t \in (R, 0)\}$).

Os módulos e homomorfismos definidos para f , podem ser definidos para o germe F .

No entanto, ao invés de θ_F , será quase sempre mais conveniente considerar campos de vetores ao longo de F , que preservam o nível R , isto é, campos ao longo de F , com *R-componente nula*.

O conjunto de tais campos é um C_{n+1} -módulo de rank p e será indicado por Ψ_F . Analogamente, Ψ_{n+1} e Ψ_{p+1} representam respectivamente campos em $(R^n \times R, 0 \times 0)$ e $(R^p \times R, 0 \times 0)$ com *R-componente nula*.

As restrições de tF e wF dão respectivamente, um C_{n+1} -homomorfismo $tF : \Psi_{n+1} \rightarrow \Psi_F$ e um morfismo sobre F^* , $wF : \Psi_{p+1} \rightarrow \Psi_F$.

Definição 1.8:

Seja $F : (R^n \times R, 0 \times 0) \rightarrow (R^p \times R, 0 \times 0)$,
 $F(x,t) = (f_t(x), t)$, $f_0 = f$.

Definimos $\partial F \in \Psi_F$ por: $(\partial F, 1) = tF(0, \frac{\partial}{\partial t})$

(∂F dá sentido claro ao símbolo $\frac{\partial}{\partial t} f_t$).

Indicaremos por $\partial_0 F(x)$ o campo $\partial F(x, 0) \in \theta_f$
 (Ou seja, $\partial_0 F(x) = \frac{\partial}{\partial t}(f_t) \big|_{t=0}$).

Lema 1.9:

Os elementos de θ_f estão em correspondência biunívoca com as classes de equivalência de germes de caminhos diferenciáveis por f , segundo a relação $F \sim G \iff \partial_o F = \partial_o G$ (Du Plessis [8]).

Nesta linha de idéias, os espaços tangentes aos grupos $G = R, L, A, C$ e K devem corresponder a subconjuntos de θ_f constituídos de elementos $\partial_o F$, onde F é caminho por f , contido na G -órbita de f .

Para o caso $G = A$, temos:

Definição 1.10:

Um caminho diferenciável por f ,

$F : (R^n \times R, 0 \times J) \rightarrow (R^p \times R, 0 \times J)$, (onde J é um intervalo de R),

$F(x, t) = (f_t(x), t)$, $f_o(x) = f(x)$ é *A-trivial* se existem caminhos diferenciáveis $H : (R^n \times R, 0 \times J) \rightarrow (R^n \times R, 0 \times J)$ e $K : (R^p \times R, 0 \times J) \rightarrow (R^p \times R, 0 \times J)$ definidos por:

$$H(x, t) = (h_t(x), t), \quad h_o(x) = I_{(R^n, 0)}(x) = x$$

e

$$K(y, t) = (k_t(y), t), \quad k_o(y) = I_{(R^p, 0)}(y) = y$$

tais que:

$$K^{-1} \circ F \circ H = f \times I_{(R, J)}$$

A Proposição abaixo caracteriza caminhos *A-triviais*:

Proposição 1.11: (Thom-Levine)

Um caminho diferenciável por f ,

$F : (R^n \times R, 0 \times [0, 1]) \rightarrow (R^p \times R, 0 \times [0, 1])$ é *A-trivial* se e somente se:

$$\partial F^a \in tf^a(m_n \psi_{n+1}) + wf^a(m_p \psi_{p+1}), \quad \forall a \in [0,1] \quad (*)$$

(Aqui, $F^a : (R^n \times R, 0 \times a) \rightarrow (R^p \times R, 0 \times a)$ é o germe-restrição de F e

ψ_{n+1} indica, para cada a , o $C(R^n \times R, 0 \times a)$ -módulo constituído dos campos em $(R^n \times R, 0 \times a)$ com R -componente nula.

Obviamente, $m_n \psi_{n+1}$ é submódulo de ψ_{n+1} constituído dos campos que se anulam em $(0, t)$.

$m_p \psi_{p+1}$ é o $C(R^p \times R, 0 \times a)$ -módulo definido analogamente).

Para a prova desta proposição, citamos Mather [26, III], Martinet [23] ou Du Plessis [8].

Fazendo $t = 0$, em $(*)$, obtemos:

$$\partial_o F \in tf(m_n \theta_n) + wf(m_p \theta_p)$$

Logo, $tf(m_n \theta_n) + wf(m_p \theta_p)$ aparece como candidato natural a espaço tangente a A -órbita de f .

Os casos R e L são naturalmente casos particulares.

Portanto, podemos definir:

Definição 1.12:

Os espaços tangentes ao grupo A, R e L são, respectivamente:

$$(1) \quad T_f A(f) = tf(m_n \theta_n) + wf(m_p \theta_p)$$

$$(2) \quad T_f R(f) = tf(m_n \theta_n)$$

$$(3) \quad T_f L(f) = wf(m_p \theta_p)$$

Em geral, usaremos a notação simplificada $T_f G$.

Para o grupo C , que age sobre o gráfico de f devemos considerar caminhos $\gamma(x,t) = (x, f_t(x), t)$ com $f_0(x) = f(x)$.

Indiquemos por γ_0 o caminho constante:

$$\gamma_0(x,t) = (x, f(x), t).$$

Analogamente ao caso anterior, temos:

Definição 1.13:

γ é C -trivial, se existe

$H : (R^n \times R^p \times R, 0 \times 0 \times 0) \rightarrow (R^n \times R^p \times R, 0 \times 0 \times 0)$, germe de difeomorfismo C^∞ definido por $H(x,y,t) = (x, h(x,y,t), t)$ com $h(x,0,t)$, tal que $H \circ \gamma(x,t) = \gamma_0(x,t)$.

Da definição de C , segue-se que as C -deformações em $(R^n \times R^p, 0 \times 0)$ devem ser verticais, isto é, são elementos $v(x,y)$ de θ_{π_2} , onde $\pi_2 : R^n \times R^p \rightarrow R^p$ é projeção usual. Além disso os difeomorfismos de C devem fixar $R^n \times 0$, ou seja, $v(x,0) = 0$.

Uma fácil generalização ao lema 1.2 mostra que se $v(x,0) = 0$, então $v_i(x,y) \in \{y_1, \dots, y_p\} C_{n+p}$ onde v_i , $i = 1, \dots, p$ são as componentes de v e $\{y_1, \dots, y_p\} C_{n+p}$ indica o ideal de C_{n+p} gerado por $\{y_1, \dots, y_p\}$.

Então: $v(x,y) = \sum_{j=1}^p \alpha_j(x,y) y_j$ com $\alpha_j(x,y) \in \theta_{\pi_2}$,
ou seja $v(x,y) \in m_p \theta_{\pi_2}$.

Com o "pull-back" pelo gráfico de f , obtemos finalmente $v(x, f(x)) \in f^*(m_p) \theta_f$.

Valem as seguintes equivalências:

Proposição 1.14:

São equivalentes as afirmações:

(i) γ é C-trivial

$$(ii) \frac{\partial f_t}{\partial t} = \pi_2(\partial \gamma) \in f_t^*(m_p)\theta_{f_t}$$

(iii) $f_t^*(m_p)\theta_{f_t} = f^*(m_p)\theta_f$ para todo t numa vizinhança de zero.

Fazendo $t = 0$ em (ii) obtemos: $\frac{\partial f_t}{\partial t} \Big|_{t=0} \in f^*(m_p)\theta_f$.

A generalização para o grupo $K = RC$ é feita sem dificuldade. Então:

Definição 1.15:

Os espaços tangentes aos grupos C e K são, respectivamente:

$$T_f C(f) = f^*(m_p)\theta_f$$

$$T_f K(f) = tf(m_n\theta_n) + f^*(m_p)\theta_f.$$

Observação 1.16:

Em qualquer um dos casos considerados, é fácil mostrar que todo elemento $v(x) \in T_f G(f)$ pode ser obtido como $\partial \circ F$, onde F é caminho trivial, no sentido das Definições 1.10 ou 1.13.

Por exemplo, quando $G = A$ e

$$v(x) = tf(\varepsilon(x)) + \eta(f(x)), \text{ com } \varepsilon \in m_n^{\theta_n}, \eta \in m_p^{\theta_p}$$

basta tomar as integrais do campo ε e η :

$$h_t(x) = I(x) + t\varepsilon(x) \quad k_t(y) = I(y) + t\eta(y) \quad \text{e definir a família}$$

$$f_t = k_t \circ f \circ h_t^{-1}. \text{ Então } \left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_{t=0} = tf(\varepsilon(x)) + \eta(f(x)) = v(x).$$

A recíproca, no entanto, não é evidente, uma vez que não é possível afirmar que para todo caminho diferenciável contido em $G(f)$, as equivalências entre f_t e f_0 variam diferenciavelmente com o parâmetro.

No caso finito, isto é da ação de um grupo de Lie G em uma variedade diferenciável M , esta dificuldade não ocorre, porque a aplicação $g \mapsto gx$ é uma submersão de G sobre Gx (órbita de x) e, portanto, qualquer germe de curva em Gx é a imagem de uma curva pela identidade de G .

No próximo parágrafo, mostraremos que para os germes finitamente determinados é possível reduzir ao caso finito e obter o resultado.

Observação 1.17:

Quando os difeomorfismos de G não fixam necessariamente a origem, usaremos a notação $T_f G_e$ para indicar os espaços tangentes estendidos, isto é,

$$\begin{aligned} T_f R_e &= tf(\theta_n) & , & & T_f C_e &= T_f C = f^*(m_p)\theta_f \\ T_f L_e &= wf(\theta_p) & , & & T_f K_e &= T_f R_e + T_f C_e, \\ T_f A_e &= T_f R_e + T_f L_e. \end{aligned}$$

§ 1.3. Caracterização de Germes Finitamente Determinados

Indiquemos por $J^k(n,p)$ o conjunto dos k -jatos de germes $f : (R^n, 0) \rightarrow (R^p, 0)$. $J^k(n,p)$ tem estrutura de espaço euclidiano R^N , onde $N = \sum_{j=1}^k \binom{n+j-1}{j} p$.

$J^k(U,V) \simeq U \times V \times J^k(n,p)$ indica o conjunto dos k -jatos de germes f com fonte em $x \in U$ e meta em $y \in V$, onde U e V são abertos contendo a origem de R^n e R^p , respectivamente.

Para cada grupo G definido anteriormente, podemos considerar o correspondente G^k , cujos elementos são obtidos tomando-se os k -jatos dos elementos de G .

A ação de G^k em $J^k(n,p)$ é induzida pela ação de G em $C_0(n,p)$, e $(j^k h) \circ (j^k f) = j^k(h \circ f)$, para $h \in G$ e $f \in C_0(n,p)$.

A aplicação $\pi^k : C_0(n,p) \rightarrow J^k(n,p)$ leva a G -órbita $f \mapsto j^k f$

de f na G^k -órbita de $j^k f$.

Além disso, para qualquer caminho $F(x,t) = (f(x,t), t)$ temos um epimorfismo de espaços vetoriais reais:

$$\pi^k : m_{n, \theta_f} \rightarrow T_{j^k f}(J^k(n,p)) \simeq J^k(n,p) \text{ definido por}$$

$$\pi^k \left(\frac{d}{dt} f_t \Big|_{t=0} \right) = \frac{d}{dt} (j^k f_t) \Big|_{t=0}$$

$$\text{É claro que } \ker \pi^k = m_n^{k+1} \theta_f$$

G^k é grupo de Lie que atua diferenciavelmente (até mesmo algebricamente) em $J^k(n,p)$ e portanto, vale a igualdade:

$$T_{j^k f} G^k = \pi^k(T_f G)$$

Para obtermos uma condição necessária para a k -determinação, temos o seguinte lema:

Lema 1.18:

Se $f : (R^n, 0) \rightarrow (R^p, 0)$ é k - G -determinado, então:

$$m_n^{k+1} \theta_f \subset T_f G + m_n^{\ell+1} \theta_f \quad \text{para qualquer } \ell \geq 0$$

Prova:

Como em Du Plessis [8] :

Se f é k -determinado, então

$$\{\text{germes com o mesmo } k\text{-jato que } f\} \subset \{\text{germes } G\text{-equivalentes a } f\}$$

logo:

$$\{\ell\text{-jatos dos germes com o mesmo } k\text{-jato que } f\} \subset \{\ell\text{-jatos dos germes } G\text{-equivalentes a } f\}.$$

Portanto:

$$\pi^\ell(m_n^{k+1} \theta_f) \subset \pi^\ell(T_f G)$$

Ou seja:

$$m_n^{k+1} \theta_f \subset T_f G + m_n^{\ell+1} \theta_f, \quad \text{para todo } \ell \geq 0.$$

Para $G = R, C$ e K , podemos usar o Lema de Nakayama (que enunciamos a seguir), para eliminar $m_n^{\ell+1} \theta_f$.

Lema 1.19: (Lema de Nakayama)

Seja R um anel comutativo com identidade e seja $m \subset R$ um ideal tal que $1+m \subset R^*$ (o grupo dos elementos inversíveis de R).

Se E é um R -módulo finitamente gerado, F é um submódulo de E e $F+mE = E$, então $F = E$.

Proposição 1.20:

Se f é k - G -determinado com $G = R, K$ ou C , tem-se:

$$m_n^{k+1} \theta_f \subset T_f G.$$

Prova:

Do Lema 1.18, com $\ell = k+1$, temos:

$$m_n^{k+1} \theta_f \subset T_f G + m_n^{k+2} \theta_f$$

Observemos que $T_f G$ tem estrutura de C_n -módulo quando $G = R, K$ ou C .

$$\text{Seja } E = T_f G + m_n^{k+1} \theta_f \quad F = T_f G \quad m = m_n.$$

Então:

$$F+mE = T_f G + m_n [T_f G + m_n^{k+1} \theta_f] = T_f G + m_n^{k+2} \theta_f \supseteq T_f G + m_n^{k+1} \theta_f = E$$

Do Lema de Nakayama, obtemos: $T_f G \supset m_n^{k+1} \theta_f$.

Uma condição suficiente para a G -determinação finita com $G = R, K$ ou C é a seguinte:

Proposição 1.21:

Se $T_f G_e \supset m_n^k \theta_f$, $G = R, K$ ou C , então f é $k+1$ - G -determinado.

Na Proposição 2.2 obtemos um refinamento deste resultado.

Quando $G = L$ ou A , a estrutura de $T_f G$ é, em geral, apenas de $f^*(C_p)$ -módulo. Neste caso, para mostrar que os módulos envolvidos são finitamente gerados, é necessário usar o Teorema da Preparação de Malgrange:

Teorema 1.22:

Seja $f : (N, a) \rightarrow (P, b)$ germe de aplicação C^∞ e seja A um C_n -módulo finitamente gerado.

Então A é finitamente gerado como $f^*(C_p)$ -módulo se e somente se $\dim_R \{A/f^*(m_p)A\}$ é finita.

Prova:

(Ver [26, III] ou [14]).

A condição suficiente para a G -determinação finita ($G = A$ ou L) que enunciamos a seguir é devida a Du Plessis [8]. A estimativa obtida para a ordem de A -determinação é, em muitos casos, um refinamento dos resultados anteriores de Mather [26, III], Martinet [24] ou Gaffney [12] :

Proposição 1.22:

Seja $f : (R^n, 0) \rightarrow (R^p, 0)$ tal que:

$$tf(m_{n\theta}^k) + wf(m_{p\theta}^k) + m_n^{2r-k+1}\theta_f \supset m_{n\theta}^r f$$

(para algum k , $1 \leq k \leq r$).

Então f é $s = \max\{r-1, 2r-2k+1\}$ -A-determinado.

Esta é a Proposição 2.1 de [8]. O objetivo da prova é mostrar que todo caminho $F : (R^n \times R, 0 \times [0, 1]) \rightarrow (R^p \times R, 0 \times [0, 1])$, tal que cada f_t tem o mesmo s-jato que f , é A-trivial.

Corolário 1.23:

Se $f : (R^n, 0) \rightarrow (R^p, 0)$ é tal que:

$$tf(m_{n\theta}^k) + wf(m_{p\theta}^k) + m_n^{2r-k+1}\theta_f \supset m_{n\theta}^r f \quad (1 \leq k \leq r)$$

Então:

$$tf(m_{n\theta}^k) + wf(m_{p\theta}^k) \supset m_{n\theta}^r f$$

Em particular, a condição necessária para a A-determinação é também obtida do Lema 1.18 com $\ell = 2r-1$ e do Corolário 1.23 com $k = 1$:

Corolário 1.24:

Se f é $(r-1)$ -A-determinado, então:

$$tf(m_{n\theta}) + wf(m_{p\theta}) \supset m_{n\theta}^r f$$

Resumindo os resultados deste parágrafo, obtemos o importante teorema devido a Mather:

Teorema 1.25: (Teorema de Caracterização de Germes Finitamente Determinados [26,III]) :

As seguintes condições são equivalentes para $G = R, C, K, L$ ou A .

- (1) f é G -finitamente determinado
- (2) Para algum inteiro r , $m_n^r \theta_f \subset T_f G$
- (3) $d(f, G) = \dim_R \{m_n \theta_f / T_f G\} < \infty$
- (4) Para algum inteiro r' , $m_n^{r'} \theta_f \subset T_f G_e$
- (5) $d_e(f, G) = \dim_R \{\theta_f / T_f G_e\} < \infty$

Já é possível também provar o resultado que anunciamos na Observação 1.16:

Corolário 1.26:

Se f é G -finitamente determinado, $T_f G$ é o *espaço tangente* do conjunto dos germes G -equivalentes a f .

Prova:

É necessário provar que um caminho por f , contido na G -órbita de f é trivial no sentido definido no parágrafo anterior.

Vamos considerar $G = A$. Para os outros grupos, a prova é análoga.

Seja $F(x,t) = (f_t(x), t)$ um caminho por f .

Como f é A -finitamente determinado, existe r tal que:

$$tf(m_n^{\theta_n}) + wf(m_p^{\theta_p}) + m_n^{2r} \theta_f \supset m_n^r \theta_f \quad e$$

f é $(2r-1)$ - A -determinado (Proposição 1.22, com $k = 1$).

Reduzindo ao caso polinomial, tomemos para $\ell \geq 2r-1$, o caminho $j^\ell F(x,t) = (j^\ell f_t(x), t)$.

É claro que $j^\ell F$ é um caminho por $j^\ell f$ contido na A^ℓ -órbita de $j^\ell f$. Neste caso, (ver Observação 1.16) existem caminhos $H(x,t)$ e $K(y,t)$ pela identidade de $(R^n, 0)$ e $(R^p, 0)$ respectivamente, tais que $(j^\ell K) \circ (j^\ell F) \circ (j^\ell H)^{-1}$ é o caminho constante por $j^\ell f$.

Podemos escolher H e K variando diferenciavelmente com t (Basta substituir, por exemplo, H e K pelos seus polinômios de Taylor de ordem ℓ). Logo, o caminho $G = K \circ F \circ H^{-1}$ é diferenciável. Além disso, para todo t , g_t tem o mesmo ℓ -jato que f . Da Proposição 1.11, segue-se então que G é A -trivial. Logo, $F = K^{-1} \circ G \circ H$ também é A -trivial.

O resultado seguinte e seu Corolário foram demonstrados por Mather com o objetivo de simplificar os argumentos usados na obtenção de estimativas da ordem de determinação:

Lema 1.27:

Seja G um grupo de Lie agindo em uma variedade M . Seja V uma subvariedade conexa de M . Então V está contida em uma só órbita de $G \iff$

- (a) Para todo $v \in V$, $T_v(Gv) \supseteq T_v(V)$ e

(b) $\dim T_v(Gv)$ é a mesma para todo $v \in V$.

Prova:

Ver Mather [26, IV].

Corolário 1.28:

Suponha que $V = \pi^{-1}y$, para alguma G -submersão $\pi : M \rightarrow N$, $y \in N$. Então (b) está satisfeita. Se (a) também se verifica, V está contida em uma só órbita.

Com estes resultados e com a Proposição 1.22, é possível provar que f é r -determinado, verificando propriedades de $T_g G$, para todo g com o mesmo r -jato que f (sem a utilização de argumentos envolvendo caminhos diferenciáveis por f).

Por exemplo:

Proposição 1.29:

f é r -A-determinado $\iff$

$$m_n^{r+1} \theta_g \subset \text{tg}(m_n \theta_n) + \text{wg}(m_p \theta_p) + m_n^{2r+2} \theta_g \quad (*)$$

para todo germe g com o mesmo r -jato que f .

A condição (*) e outras semelhantes exigem para sua verificação, *Lemas de Uniformidade*, cujo objetivo é mostrar que se f e g diferem por termos de ordem convenientemente alta, o mesmo ocorre com $T_f G$ e $T_g G$.

Para estes lemas, é importante observar que θ_f e θ_g podem ser identificados.

Lema 1.30:

Sejam f e g tais que $j^k f(0) = j^k g(0)$. Então:

- (i) Se $\xi \in \theta_n$, $tf(\xi) - tg(\xi) \in m_n^k \theta_f$
- (ii) Se $\phi \in C_p$, $f^* \phi - g^* \phi \in m_n^{k+1} \theta_f$
- (iii) Se $\eta \in \theta_p$, $wf(\eta) - wg(\eta) \in m_n^{k+1} \theta_f$

Ou, com a mesma hipótese:

Lema 1.31:

Para todo G , $T_f G + m_n^{k+1} \theta_f = T_g G + m_n^{k+1} \theta_g$

§ 1.4. Os grupos $G_{[k]}$

A seguinte generalização da Teoria é também devida a Mather [26, III] :

Definição 1.32:

Se $G = R, L$ ou A , definimos $G_{[k]} = \{h \in G \mid h \text{ tem o mesmo } (k-1)\text{-jato que a identidade de } G\}$

Definição 1.33:

Para $G = C$ ou K , definimos:

$$C_{[k]} = \{H \in C, H : (R^n \times R^p, 0 \times 0) \rightarrow (R^n \times R^p, 0 \times 0)\}$$

$$H(x, y) = (x, h(x, y)) \mid \text{ para cada } x, \text{ o germe de apli}$$

cação $y \rightarrow h_x(y)$ tem o mesmo $(k-1)$ -jato que a identidade

$I_{\mathbb{R}^p, 0}$ e

$$K_{[k]} = R_{[k]} \circ C_{[k]} \quad (\text{produto semi-direto})$$

Definição 1.34:

Um germe $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ é r - $G_{[k]}$ determinado quando todo germe $g : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ com o mesmo r -jato que f , é $G_{[k]}$ -equivalente a f .

(Se $k = 1$, obtemos a noção de r - G -determinação).

Resultados de $G_{[k]}$ -trivialidade e estimativas para a ordem de $G_{[k]}$ -determinação podem ser obtidos analogamente ao caso anterior, observando que se as derivadas de um germe de campo de vetores tem as derivadas nulas até ordem $(k-1)$ (inclusive), então os germes de difeomorfismos obtidos dos fluxos correspondentes tem o mesmo $(k-1)$ -jato que a identidade.

Assim, temos:

Proposição 1.35:

Com a mesma notação anterior:

(i) F é $A_{[k]}$ -trivial $\iff$

$$\partial F^a \in tF^a(m_{n, n+1}^k) + wF^a(m_{p, p+1}^k) \quad \forall a \in [0, 1]$$

(ii) F é $K_{[k]}$ -trivial $\iff$

$$\partial F^a \in tF^a(m_{n+1}^k) + (F^a)^*(m_p^k) \psi_{F^a} \quad \forall a \in [0,1]$$

Observação:

Fazendo $t = 0$ em (i) e (ii) obtemos as expressões para os espaços tangentes.

Os grupos $G_{[k]}$ são fundamentais ao desenvolvimento deste trabalho. Em particular, estimativas para a ordem de $G_{[k]}$ -determinação serão obtidas nos Capítulos II e IV.

CAPÍTULO II

C^ℓ -K-DETERMINAÇÃO FINITA

§ 2.1. Os Resultados

Sejam $f, g : (R^n, 0) \rightarrow (R^p, 0)$ germes de aplicações de classe C^∞ .

Definição 2.1:

f e g são C^ℓ -K-equivalentes, $0 \leq \ell \leq \infty$ se existem

$$h : (R^n, 0) \rightarrow (R^n, 0), \quad H : (R^n \times R^p, 0 \times 0) \rightarrow (R^n \times R^p, 0 \times 0)$$

germes de difeomorfismos de classe C^ℓ (ou homeomorfismos, quando $\ell = 0$), que comutem o diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} (R^n, 0) & \xrightarrow{(1, f)} & (R^n \times R^p, 0 \times 0) & \xrightarrow{\pi_{R^n}} & (R^n, 0) \\ \uparrow h & & \uparrow H & & \uparrow h \\ (R^n, 0) & \xrightarrow{(1, g)} & (R^n \times R^p, 0 \times 0) & \xrightarrow{\pi_{R^n}} & (R^n, 0) \end{array}$$

Em particular, se f e g são C^ℓ -K-equivalentes, segue-se que os conjuntos $f^{-1}(0)$ e $g^{-1}(0)$ são C^ℓ -isomorfos.

Quando $\ell = \infty$, obtemos K , grupo de contato.

O principal resultado deste Capítulo, o Teorema 2.7, fornece uma estimativa para a ordem de C^ℓ -K-determinação:

Teorema 2.7:

Se $f : (R^n, 0) \rightarrow (R^p, 0)$ é tal que:

$$(*) \quad tf(m_{n\theta}^k) + f^*(m_p)m_{n\theta}^{k-1}f \supseteq m_{n\theta}^r f$$

então f é $r-k+l$ -determinado com respeito a C^{l-K} , $l \geq 1$.

Para $l = 0$, tem-se o seguinte resultado:

Teorema 2.11:

Se $f : (R^n, 0) \rightarrow (R^p, 0)$ satisfaz $(*)$

e $g-f \in m_{n\theta}^{r-k+1}f$, então: para $|t| < \delta$,

$f_t(x) = f(x) + t(g(x) - f(x))$ é C^0 - K -equivalente a $f(x)$.

§ 2.2. Uma estimativa para a ordem de K determinaçãoProposição 2.2:

Seja $f : (R^n, 0) \rightarrow (R^p, 0)$ tal que:

$$tf(m_{n\theta}^2) + f^*(m_p)m_{n\theta}f \supseteq m_{n\theta}^r f$$

Então f é $(r-1)$ -determinado com respeito ao grupo K .

Prova:

Seja g tal que $j^{r-1}g(0) = j^{r-1}f(0)$

Então

$$tg(m_{n\theta}) + g^*(m_p)\theta_g \subseteq tf(m_{n\theta}) + f^*(m_p)\theta_f$$

(uma vez que os termos de ordem $\leq r-1$ coincidem e

$T_f K \supseteq m_n^r \theta_f$, por hipótese).

Logo,

$$tg(m_n \theta_n) + g^*(m_p) \theta_g + m_n [tf(m_n \theta_n) + f^*(m_p) \theta_f] = tf(m_n \theta_n) + f^*(m_p) \theta_f$$

e pelo lema de Nakayama, aplicado ao C_n -módulo:

$tf(m_n \theta_n) + f^*(m_p) \theta_f$ e seu submódulo $tg(m_n \theta_n) + g^*(m_p) \theta_g$

temos:

$$tg(m_n \theta_n) + g^*(m_p) \theta_g = tf(m_n \theta_n) + f^*(m_p) \theta_f$$

O resultado segue, portanto, do Teorema 1.25 e do Lema 1.27.

Corolário 2.3:

Seja $f : (R^n, 0) \rightarrow (R^p, 0)$ tal que:

$$(*) \quad tf(m_n^k \theta_n) + f^*(m_p) m_n^{k-1} \theta_f \supseteq m_n^r \theta_f \quad 2 \leq k \leq r$$

Então f é $r-1$ -determinada com respeito a K .

Prova: Óbvia

Corolário 2.4:

Se $k = 1$ em $(*)$, f é r -determinada com respeito a K .

Prova:

A hipótese da Proposição 2.2 está satisfeita para $r+1$.

Exemplo 2.5:

Seja $f(x,y) = x^5 + y^5$. Temos:

$$tf(m_2^3) = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right\rangle m_2^3 = m_2^7$$

f é 6-determinado pelo Corolário 2.3 e f não é 5-determinado, pois $x^3 y^3 \notin \left\langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right\rangle m_2^3$,

o que mostra a estimativa do Corolário 2.3 é a melhor possível para a hipótese considerada. Entretanto, a propriedade de ser 6-determinada depende apenas do 5-jato, isto é, qualquer g tal que

$j^5 g(0) = j^5 f(0)$, é também 6-determinado com respeito a K (ou R , ou A). De fato, vale a seguinte proposição:

Proposição 2.5:

Seja $T_k(f) = tf(m_n^k) + f^*(m_p)m_n^{k-1}$

Suponha que $(*) T_k(f) \supseteq m_n^r$. Então $\forall g$ tal que

$j^{r-k+1} g(0) = j^{r-k+1} f(0)$, g também satisfaz $(*)$.

Mais precisamente, $T_k(f) = T_k(g)$.

Prova:

$$tg(m_n^{\theta_n}) + g^*(m_p)_{\theta_g} + m_n^{r-k+2}_{\theta_g} \supseteq tf(m_n^{\theta_n}) + f^*(m_p)_{\theta_f}$$

Multiplicando por m_n^{k-1} :

$$tg(m_n^k_{\theta_n}) + g^*(m_p)m_n^{k-1}_{\theta_g} + m_n^{r+1}_{\theta_g} \supseteq tf(m_n^k_{\theta_n}) + f^*(m_p)m_n^{k-1}_{\theta_f}$$

Por hipótese $T_k(f) \supseteq m_n^r_{\theta_f}$, o qual identificamos com $m_n^r_{\theta_g}$.

$$\begin{aligned} & tg(m_n^k_{\theta_n}) + g^*(m_p)m_n^{k-1}_{\theta_g} + m_n[tf(m_n^k_{\theta_n}) + f^*(m_p)m_n^{k-1}_{\theta_f}] \supseteq \\ & \supseteq tf(m_n^k_{\theta_n}) + f^*(m_p)m_n^{k-1}_{\theta_f}. \end{aligned}$$

Por outro lado, é claro que:

$$tg(m_n^k_{\theta_n}) + g^*(m_p)m_n^{k-1}_{\theta_g} \subseteq tf(m_n^k_{\theta_n}) + f^*(m_p)m_n^{k-1}_{\theta_f}$$

Portanto, segue-se do lema de Nakayama que

$$tf(m_n^k_{\theta_n}) + f^*(m_p)m_n^{k-1}_{\theta_f} = tg(m_n^k_{\theta_n}) + g^*(m_p)m_n^{k-1}_{\theta_g}$$

É ainda possível mostrar que deformações pequenas de ordem $r-k+1$ também preservam a propriedade (*):

Proposição 2.6:

Seja $f : (R^n, 0) \rightarrow (R^p, 0)$ tal que (*) $T_k(f) \supseteq m_n^r_{\theta_f}$

Então:

Existe uma vizinhança U de $j^{r+1}f(0)$, no conjunto dos $r+1$ -jatos com o mesmo r -k-jato que f , tal que qualquer germe g com $r+1$ -jato em U , também satisfaz $(*)$.

Prova:

Por hipótese:

$$tf(m_n^k \theta_n) + f^*(m_p)m_n^{k-1} \theta_f \supseteq m_n^r \theta_f.$$

Portanto, podemos escolher $\xi_i \in m_n^k \theta_n$, $\eta_i \in f^*(m_p)m_n^{k-1} \theta_f$ tais que:

$\{tf(\xi_i) + \eta_i, i = 1, \dots, N\}$ é uma R -base para

$$\frac{m_n^r \theta_f}{m_n^{r+1} \theta_f}, \quad N = \dim_R \frac{m_n^r \theta_f}{m_n^{r+1} \theta_f} = \binom{n+r-1}{r}$$

Seja g tal que $j^{r-k}g(0) = j^{r-k}f(0)$

Logo: $tg(\xi_i) + \eta_i \in m_n^r \theta_g$

Nestas condições o R -homomorfismo:

$$B_g : R^N \rightarrow \frac{m_n^r \theta_f}{m_n^{r+1} \theta_f},$$

$$B_g(a_1, \dots, a_N) = \sum_{i=1}^N a_i \{tg(\xi_i) + \eta_i\}$$

está bem definido e, claramente, depende continuamente do $r+1$ -jato de g .

Por hipótese, B_f é um isomorfismo, logo B_g também é um isomorfismo, para g suficientemente próximo de f . Isto é, existe uma vizinhança aberta U de

$j^{r+1}f(0)$ em $\{j^{r+1}g(0) \mid j^{r-k}f(0) = j^{r-k}g(0)\}$ tal que

Se $j^{r+1}g \in U$, então B_g é um isomorfismo.

Portanto:

$$m_{n_g}^r \subset \text{tg}(m_{n_n}^k) + g^*(m_p) m_{n_g}^{k-1} + m_{n_g}^{r+1}$$

Pelo Lema de Nakayama:

$$\text{tg}(m_{n_n}^k) + g^*(m_p) m_{n_g}^{k-1} \supset m_{n_g}^r$$

§ 2.3. $C^{\ell-K}$ -Determinação Finita ($\ell \geq 1$) e Invariança Topológica de $F_t^{-1}(0)$, $|t| < \delta$

Teorema 2.7:

Seja $f : (R^n, 0) \rightarrow (R^p, 0)$ tal que $T_k(f) \supseteq m_{n_f}^r$.

Então f é $r-k+\ell$ -determinado com respeito a $C^{\ell-K}$ ($1 \leq \ell < k-1$)

Para a demonstração do Teorema 2.7, é necessário mostrar que a condição algébrica $T_k(f) \supseteq m_{n_f}^r$ é verdadeira para um caminho:

Lema 2.8:

Suponha que $T_k(f) \supseteq m_{n_f}^r$ e seja $F(t, x)$ uma deformação de f , com:

$$F(t, x) - F(a, x) \in (t-a)m_{n_{F^a}}^{r-k+2}, \quad \forall a \in R$$

Então:

$$m_{n, F^a}^{r, \theta} \subseteq tF^a(m_{n, \psi_{n+1}}^k) + (F^a)^*(m_p)m_n^{k-1, \theta}_{F^a}, \quad \text{onde:}$$

F^a é o germe de $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^p$ em $(0, a)$, $a \in \mathbb{R}$
e ψ_{n+1} é o conjunto dos germes de campos de vetores

$\gamma : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, 0 \times a) \rightarrow (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, 0 \times a)$, com componente na direção $\frac{\partial}{\partial t}$ nula.

Prova:

Chamemos f^a o germe $f^a : (\mathbb{R}^n \times \{a\}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$
 $x \longrightarrow f^a(x) = F(a, x)$

Do Teorema de Taylor, segue-se que:

$$m_{n, F^a}^{r, \theta} \subseteq m_{n, f^a}^{r, \theta} + (t-a)m_{n, F^a}^{r, \theta}$$

Da Proposição 2.5, vem:

$$m_{n, f^a}^{r, \theta} \subseteq t f^a(m_{n, \theta}^k) + (f^a)^*(m_p)m_n^{k-1, \theta}_{f^a}, \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

Portanto:

$$(i) \quad m_{n, F^a}^{r, \theta} \subseteq t f^a(m_{n, \theta}^k) + (f^a)^*(m_p)m_n^{k-1, \theta}_{f^a} + (t-a)m_{n, F^a}^{r, \theta}$$

Além disso:

$$(ii) \quad t f^a(m_{n, \theta}^k) + (f^a)^*(m_p)m_n^{k-1, \theta}_{f^a} \subseteq t F^a(m_{n, \psi_{n+1}}^k)$$

$$+ (F^a)^*(m_p)m_n^{k-1, \theta}_{F^a} + (t-a)m_{n, F^a}^{r+1, \theta}, \quad \text{uma vez que}$$

$$F(t, x) - F(a, x) \in (t-a)m_{n, F^a}^{r-k+2, \theta}$$

(i) e (ii) implicam:

$$m_{n, F^a}^{r, \theta} \subseteq t F^a(m_{n, \psi_{n+1}}^k) + (F^a)^*(m_p)m_n^{k-1, \theta}_{F^a} + (t-a)m_{n, F^a}^{r, \theta}$$

Agora, podemos aplicar o Lema de Nakayama ao $C(R \times R^n, 0 \times a)$ -módulo acima e o resultado é obtido.

Prova do Teorema 2.7:

Seja g tal que: $j^{r-k+\ell} g(0) = j^{r-k+\ell} f(0)$.

(Podemos supor $\ell < k-1$, uma vez que, para $r-k+\ell \geq r-1$, a estimativa é dada pela Proposição 2.2: f é $r-1$ - K -determinado).

Consideremos a deformação de f :

$$F : (R^n \times R, 0) \rightarrow (R^p, 0)$$

$$F(t, x) = f(x) + t(g(x) - f(x)), \quad t \in [0, 1]$$

Seja $g(x) - f(x) = v(x)$. Por hipótese, $v(x) \in m_n^{r-k+\ell+1} \theta_f$.

Definamos

$$\gamma : (R^n \times R, 0) \rightarrow (R^n \times R^p \times R, 0) \quad \text{por:}$$

$$(x, t) \longmapsto \gamma(x, t) = (x, F(x, t), t)$$

Nosso objetivo é encontrar deformações r, s (de classe C^ℓ) de $\text{id}_{R^n} \times 0$ e $\text{id}_{R^n \times R^p} \times 0$, respectivamente, de forma que o diagrama abaixo seja comutativo:

$$\begin{array}{ccccc} (R^n, 0) & \xrightarrow{(I, f)} & (R^n \times R^p, 0 \times 0) & \xrightarrow{\pi_{R^n}} & (R^n, 0) \\ r \uparrow & & \uparrow s & & \uparrow r \\ (R^n \times R, 0 \times I) & \xrightarrow{\gamma} & (R^n \times R^p \times R, 0 \times 0 \times I) & \xrightarrow{\pi_{R^n \times R}} & (R^n \times R, 0 \times I) \end{array}$$

Então:

$$r^1 : (R^n, 0) \rightarrow (R^n, 0) \quad \text{definida por} \quad r^1(x) = r(x, 1),$$

$$s^1 : (R^n \times R^p, 0 \times 0) \rightarrow (R^n \times R^p, 0 \times 0) \quad \text{definida por:}$$

$$s^1(x, y) = s(x, y, 1) \quad \text{e}$$

$\gamma^1 : (R^n, 0) \rightarrow (R^n \times R^p, 0 \times 0)$ definida por: $\gamma^1(x) = (x, g(x))$
 darão a C^ℓ -K-equivalência:

$$\begin{array}{ccccc} (R^n, 0) & \xrightarrow{(1, f)} & (R^n \times R^p, 0 \times 0) & \xrightarrow{\pi_{R^n}} & (R^n, 0) \\ \uparrow r^1 & & \uparrow s^1 & & \uparrow r^1 \\ (R^n, 0) & \xrightarrow{(1, g)} & (R^n \times R^p, 0 \times 0) & \xrightarrow{\pi_{R^n}} & (R^n, 0) \end{array}$$

Construiremos r e s em uma vizinhança de $t=0$; pelo lema 2.8 todos os argumentos são também verdadeiros em uma vizinhança de qualquer $a \in [0, 1]$.

Do lema 2.8 temos:

$$m_n^r \theta_F \subset tF(m_{n+1}^k \psi) + F^*(m_p) m_n^{k-1} \theta_F \quad (**)$$

A expressão (**) permite a construção de "campos de vetores controlados", como segue: Dizemos que uma função $\rho : R^n \rightarrow R$ de classe C^∞ (ou suficientemente alta) é uma função de controle se $\exists$ constantes $c > 0$, $\alpha > 0$ tais que $\rho(x) \geq c|x|^\alpha$.

Em nosso caso, basta considerar $\rho(x) = |x|^{k-(\ell+1)}$, $\ell < k-1$ (Multiplicando (**) por uma potência conveniente de m_n , podemos ainda assumir $k-(\ell+1)$ par).

$$\text{Então: } \rho(x) \cdot v(x) \in m_n^r \theta_F$$

$$\text{De (**), obtemos: } \xi'(x, t) \in m_{n+1}^k \psi$$

$$\eta'(x, t) \in m_n^{k-1} F^*(m_p) \theta_F \quad \text{tais que:}$$

$$\rho(x) \cdot v(x) = tF(-\xi'(x, t)) + \eta'(x, t)$$

Recordemos a definição de γ :

$$\gamma : (R^n \times R, 0 \times 0) \rightarrow (R^n \times R^p \times R, 0)$$

$$(x, t) \longmapsto \gamma(x, t) = (x, F(x, t), t)$$

γ é uma imersão e $F = \pi_{\mathbb{R}^p} \circ \gamma$, portanto existe

$\eta'' \in m_n m_p^\psi p+1$ tal que $\eta'' \circ \gamma = \eta'$

(se $\eta'(x,t) = \sum_{i=1}^p h_i(x,t) F_i(x,t)$, com $h_i \in m_n^{k-1} \theta_F$,

podemos tomar $\eta''(x,y,t) = \sum_{i=1}^p h_i(x,t) y_i$, $h_i \in m_n^{k-1} \theta_F$).

Seja;

$$\xi = (\xi', \rho \circ \pi_{\mathbb{R}^n}) \quad \eta = (\xi' \circ \pi_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}}, \eta'', \rho \circ \pi_{\mathbb{R}^n})$$

Então:

$$D\gamma(x,t) \circ \xi(x,t) = (\eta \circ \gamma)(x,t)$$

$$\text{De fato: } D\gamma(x,t) \circ \xi(x,t) =$$

$$\begin{bmatrix} \text{Id}_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}} & 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial t} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi'(x,t) \\ \rho(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi'(x,t) \\ tF(-\xi'(x,t)) + \rho(x) \frac{\partial F}{\partial t}(x,t) \\ \rho(x) \end{bmatrix} = (\eta \circ \gamma)(x,t)$$

Agora, definamos campos de vetores em $(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, 0 \times 0)$ e $(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}, 0)$, respectivamente, por:

$$\begin{cases} v(x,t) = \frac{\xi(x,t)}{\rho(x)} & \text{Se } x \neq 0 \\ v(0,t) = \frac{\partial}{\partial t} & \text{Se } x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} w(x,y,t) = \frac{\eta(x,y,t)}{\rho(x)} & \text{Se } x \neq 0 \\ w(0,y,t) = \frac{\partial}{\partial t} & \text{Se } x = 0 \end{cases}$$

Portanto, as coordenadas de v e w são, respectivamente:

$$\left\{ \begin{array}{l} v(x,t) = \left(\frac{\xi'_1(x,t)}{\rho(x)}, \dots, \frac{\xi'_n(x,t)}{\rho(x)}, 1 \right) \quad x \neq 0, \text{ com } \xi'_i(x,t) \in m_{n+1}^k C \\ v(0,t) = (0, \dots, 0, 1) \quad \text{Se } x = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} w(x,y,t) = \left(\frac{\xi'_1(x,t)}{\rho(x)}, \dots, \frac{\xi'_n(x,t)}{\rho(x)}, \frac{\eta''_1(x,y,t)}{\rho(x)}, \dots, \frac{\eta''_p(x,y,t)}{\rho(x)}, 1 \right) \\ \hspace{15em} \text{Se } x \neq 0 \\ w(0,y,t) = (0, \dots, 0, 1) \quad \text{Se } x = 0 \end{array} \right.$$

$$\text{onde } \eta''(x,y,t) = \sum_{i=1}^p h_i(x,t) y_i, \quad \text{com } h_i \in m_n^{k-1} \theta_F$$

É claro que v e w satisfazem a equação
 $D_Y(v(x,t)) = w(Y(x,y,t)).$

O lema abaixo será usado na demonstração de que os campos v e w são de classe C^ℓ :

Lema 2.9:

Seja $\rho(x) = |x|^k$ e seja $h : (R^n, 0) \rightarrow (R, 0)$

$$\left\{ \begin{array}{l} h(x) = \frac{\varepsilon(x)}{\rho(x)} \quad \text{onde } \varepsilon(x) \in m_n^{r+k}, \quad \text{Então } h \text{ é de classe } C^{r-1}. \\ h(0) = 0 \end{array} \right.$$

Prova:

Vamos mostrar que $h \in C^1$.

Observemos que h é diferenciável e $h'(0) = 0$.

$$\lim_{|x| \rightarrow 0} \frac{|h(x)|}{|x|} \leq \lim_{|x| \rightarrow 0} \frac{C \cdot |x|^{r+k}}{|x| \cdot |x|^k} = 0 \quad (\text{Se } r > 1)$$

Além disso:

$$(i) \quad \text{grad } h(x) = \frac{\text{grad} \varepsilon(x)}{\rho(x)} - \frac{\varepsilon(x)}{\rho^2(x)} \cdot \text{grad} \rho(x)$$

Temos:

$$|\text{grad} \rho(x)| = \langle \text{grad} \rho(x), \text{grad} \rho(x) \rangle^{1/2} = k|x|^{k-1}$$

$$(\text{pois } \text{grad} \rho(x) = k(x_1^2 + \dots + x_n^2)^{k/2-1} \cdot (x_1, \dots, x_n)).$$

Portanto:

$$\begin{aligned} |\text{grad} h(x)| &\leq \frac{|\text{grad} \varepsilon(x)|}{|\rho(x)|} + \frac{|\varepsilon(x)|}{\rho^2(x)} \cdot |\text{grad} \rho(x)| \leq \\ &\leq \frac{C_1 |x|^{r+k-1}}{|x|^k} + C_2 \frac{|x|^{r+k}}{|x|^k} \cdot \frac{|x|^{k-1}}{|x|^k} = C' |x|^{r-1} \end{aligned}$$

$\therefore$ $\text{grad} h(x)$ é uma função contínua desde que $r \geq 2$.

Logo, h é de classe C^1 .

De (i), vem:

$$\begin{aligned} \text{grad} h(x) &= \left[\left(\frac{\partial h}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial h}{\partial x_n} \right) \right] = \frac{1}{\rho(x)} \left(-\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_1}, \dots, -\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_n} \right) - \\ &\quad - \frac{\varepsilon(x) \cdot k \cdot |x|^{k-2}}{|x|^k \cdot |x|^k} (x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

$$\text{ou: } \text{grad} h(x) = \frac{1}{\rho(x)} \left(-\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_1}, \dots, -\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_n} \right) - \frac{(k\varepsilon(x) \cdot x_1, \dots, k\varepsilon(x) \cdot x_n)}{|x|^{k+2}}$$

Podemos repetir o argumento utilizado na 1.^a parte da demonstração para obter que cada componente de $\text{grad}h(x)$ é de classe C^1 desde que $r \geq 3$.

Observemos que:

$$\frac{\partial h}{\partial x_i} = \frac{\frac{\partial \epsilon}{\partial x_i}}{|x|^k} - \frac{k\epsilon(x) \cdot x_i}{|x|^{k+2}}$$

com $\frac{\partial \epsilon}{\partial x_i} \in m_n^{r+k-1}$ e $\epsilon(x)x_i \in m_n^{r+k+1}$

Voltando à demonstração do teorema:

Vemos imediatamente do lema 2.9 que v é um campo de classe C^ℓ , e w é de classe $C^{\ell-1}$.

Devemos modificar w para obtermos um campo de classe C^ℓ .

Observemos que:

$$\eta''(x,y,t) = \sum_{i=1}^P h_i(x,t)y_i, \quad h_i \in m_n^{k-1} \theta_F$$

$$\frac{|\eta''(x,y,t)|}{|\rho(x)|} \leq C|x||y| \quad \text{e portanto todas as compo-}$$

nentes de w são contínuas.

Além disso, as derivadas parciais de qualquer ordem com respeito à y existem e são contínuas.

Como $F(x,t) \in m_n \theta_F$ temos que $|F(x,t)| \leq C|x|$

Sejam U e V vizinhanças de $|y| \leq C|x|$ em $R^n \times R^p \times R - 0 \times 0 \times R$. Por exemplo:

$$V = \{(x,y,t) \mid |y| < (C+1)|x|, (x,y) \neq (0,0)\} \text{ e } V \supset \bar{U} \supset U$$

Considere $p : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$p|_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R} - 0 \times 0 \times \mathbb{R}} \in C^\infty,$$

$$p(x, y, t) = 1 \quad \text{se } (x, y, t) \in \bar{U}$$

$$p(x, y, t) = 0 \quad \text{fora de } V$$

$$0 \leq p(x, y, t) \leq 1 \quad \text{em } V - \bar{U}$$

$$\text{e } p(0, 0, t) = 0$$

$$\text{Portanto } |p(x, y, t) \cdot y| \leq K|x| \quad (*)$$

No lema 2.10 mostraremos ser possível construir uma tal função p com a propriedade:

$$\forall s \geq 0, \quad |D^s(p(x, y) \cdot y)| \leq \frac{K_s}{|x|^{s-1}}, \quad K_s = \text{constante } (**)$$

Admitindo a existência de p , definamos um campo W numa vizinhança de $0 \times 0 \times \mathbb{R}$ em $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}$, da seguinte forma:

$$\begin{cases} W_i(x, y, t) = w_i(x, y, t) & \text{se } 1 \leq i \leq n \text{ ou } i = n+p+1 \\ W_j(x, y, t) = p(x, y, t) \cdot w_j(x, y, t) & \text{se } n+1 \leq j \leq n+p \end{cases}$$

Logo,

$$W_j(x, y, t) = \frac{\sum h_{ij}(x, t) \cdot p(x, y, t) \cdot y_i}{\rho(x)}, \quad h_{ij} \in m_n^{k-1}$$

$$\rho(x) = |x|^{k-(\ell+1)}$$

Com estas hipóteses, segue-se que W é de classe C^ℓ .

De fato, temos apenas que verificar a diferenciabilidade dos W_j , $n+1 \leq j \leq n+p$.

$$W_j = \frac{h_j}{\rho} py_j, \quad \text{onde } \frac{h_j}{\rho} \text{ é de classe } C^{\ell-1} \text{ (lema 2.9).}$$

$$\text{e } \left| \frac{h_j}{\rho} \right| \leq M|x|^\ell$$

Além disso py_j satisfaz (*) e (**).

Logo,

$$|W_j(x, y, t)| \leq C|x|^{\ell+1} \quad \therefore W_j \text{ é contínua.}$$

$$DW_j = D\left(\frac{h_j}{\rho}\right)py_j + \frac{h_j}{\rho}D(py_j) \implies$$

$$\implies |DW_j| \leq C_1|x|^\ell \text{ e portanto, } W \text{ é } C^1, \text{ se } \ell \geq 1.$$

$$D^2W_j = D^2\left(\frac{h_j}{\rho}\right)py_j + 2D\left(\frac{h_j}{\rho}\right)D(py_j) + \frac{h_j}{\rho}D^2(py_j)$$

$$\therefore |D^2W_j| \leq C_1|x|^{\ell-2}|x| + C_2|x|^{\ell-1}K_1 + C_3|x|^\ell \frac{k_2}{|x|}$$

$$\therefore W \text{ é } C^2 \text{ se } \ell \geq 2.$$

Em geral:

$$\begin{aligned} |D^s W_j| &= \left| \sum_{i=0}^s \binom{s}{i} D^i\left(\frac{h_j}{\rho}\right) D^{s-i}(py_j) \right| \leq \\ &\leq \sum_{i=0}^s C_i |x|^{\ell-i} \frac{k_{s-i}}{|x|^{s-i-1}} = C|x|^{\ell-s+1} \end{aligned}$$

que é, portanto, contínua se $s \leq \ell$.

Ou seja, W é de classe C^ℓ .

Como W coincide com w em uma vizinhança cônica do gráfico de $F(x,t)$, a equação:

$$D\gamma(v(x,y,t)) = W(\gamma(x,y,t)) \text{ também se verifica.}$$

As integrais dos campos v e W definem os difeomorfismos de classe C^ℓ :

$$R : (R^n \times R, 0) \rightarrow (R^n \times R, 0),$$

$$R(x,t) = (r(x,t), t), \text{ com } r(x,0) = I_{R^n}$$

$$e \quad S : (R^n \times R^p \times R, 0) \rightarrow (R^n \times R^p \times R, 0),$$

$$S(x,y,t) = (s(x,y,t), t), \text{ com}$$

$$s(x,y,0) = I_{R^n \times R^p} \quad e \quad \pi_{R^n}[S(x,y,t)] = r(x,t)$$

Além disso:

$$[S \circ \gamma \circ R^{-1}](x,t) = (x, f(x), t)$$

$$\text{Sejam: } r^1 : (R^n, 0) \rightarrow (R^n, 0) \text{ e}$$

$$s^1 : (R^n \times R^p, 0) \rightarrow (R^n \times R^p, 0) \text{ definidas por:}$$

$$r^1(x) = r(x,1) \text{ e } s^1(x,y) = s(x,y,1)$$

Então: $s^1 \circ (I, g) \circ (r^1)^{-1} = (I, f)$. Ou seja, f e g são C^ℓ -K-equivalentes.

Lema 2.10:

$$\text{Sejam } |y| \leq C_1 |x| \text{ e } |y| \leq C_2 |x|$$

cones em $R^n \times R^p$, com $C_1 < C_2$.

Existe $p : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$, $p \in C^\infty$ em $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p - 0 \times 0$, tal que:

$$p(x,y) = 1 \quad \text{se} \quad |y| \leq C_1 |x|, \quad (x,y) \neq (0,0)$$

$$p(x,y) = 0 \quad \text{se} \quad |y| > C_2 |x|$$

$$0 \leq p(x,y) \leq 1 \quad \text{se} \quad C_1 |x| \leq |y| \leq C_2 |x|$$

$$p(0,0) = 0$$

Além disso:

$$|D^s(p(x,y)y)| \leq \frac{K_s}{|x|^{s-1}}$$

Prova:

(I) Faremos, primeiramente, o caso $n = p = 1$.

Seja $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a função C^∞ cujo gráfico está na Fig. 2.1, isto é,

$$h(\theta) = 1 \quad \text{se} \quad 0 \leq \theta \leq \theta_1$$

$$h(\theta) = 0 \quad \text{se} \quad \theta \geq \theta_2, \quad 0 \leq h(\theta) \leq 1 \quad \text{se} \quad \theta_1 < \theta < \theta_2$$

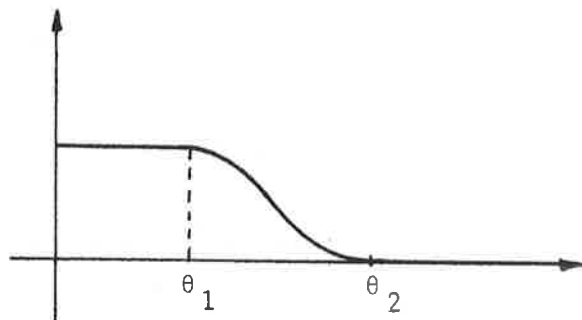


Fig. 2.1

Definamos:

$$p(x,y) = h(\theta), \quad \text{onde} \quad \theta = \arctg \frac{y}{x}$$

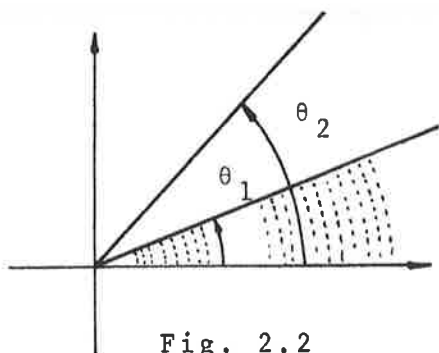


Fig. 2.2

$$\text{Então} \quad |p(x,y)y| \leq \tg \theta_1 |x|$$

Derivando py , obtemos:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}(py) &= \frac{\partial p}{\partial x}y = h'(\theta) \frac{\partial}{\partial x}(\arctg \frac{y}{x})y = \\ &= h'(\theta) \left(\frac{-y}{x^2+y^2} \right) y = h'(\theta) \left(\frac{-y^2}{x^2+y^2} \right)\end{aligned}$$

$$\text{e } \frac{\partial}{\partial y}(py) = \frac{\partial p}{\partial y}y + p = h'(\theta) \left(\frac{xy}{x^2+y^2} \right) + p(x,y).$$

Como $h(\theta)$ é C^∞ , segue-se que

$$\frac{\partial}{\partial x}(py) \text{ e } \frac{\partial}{\partial y}(py) \text{ são limitadas.}$$

As derivadas segundas são:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(py) = h''(\theta) \frac{-y^3}{(x^2+y^2)^2} + h'(\theta) \frac{2xy^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}(py) &= h''(\theta) \frac{-xy^2}{(x^2+y^2)^2} + h'(\theta) \frac{(y^3 - x^2y)}{(x^2+y^2)^2} + h'(\theta) \left(\frac{-y}{x^2+y^2} \right) \\ &= - \frac{h''(\theta)xy^2}{(x^2+y^2)^2} - \frac{h'(\theta)2x^2y}{(x^2+y^2)^2}\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}(py) = h''(\theta) \frac{x^2y}{(x^2+y^2)^2} + h'(\theta) \frac{2x^3}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\therefore |D^2(py)| \leq \frac{K_2}{|x|}.$$

Derivando sucessivamente, encontraremos que uma derivada parcial de ordem s de p_y é da forma:

$$\sum_{i=1}^s h^{(i)}(\theta) \frac{q_i(x,y)}{(x^2+y^2)^s}$$

onde q_i é polinômio homogêneo de grau $s+1$ e $h^{(i)}(\theta)$ indica a i -ésima derivada de h com relação a θ .

$$\text{Logo } |D^s p_y| \leq \frac{K_s}{|(x,y)|^{s-1}} \leq \frac{K_s}{|x|^{s-1}}$$

(II) Para todo $n \geq 1$ e $p = 1$ podemos definir:

$$\begin{cases} p(x_1, \dots, x_n, y) = h(\theta) & \text{se } |x| \neq 0 \\ p(0, y) = 0 \end{cases}$$

onde $\theta = \text{arctg } \frac{y}{|x|}$.

No caso geral, basta definir:

$$\begin{cases} p(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_p) = p_1(x, y) p_2(x, y) \dots p_p(x, y) & \text{se } |x| \neq 0 \\ \text{onde } p_i(x, y) = h(\theta_i), \quad \theta_i = \text{arctg } \frac{y_i}{|x|} \\ p(0, y) = 0. \end{cases}$$

Teorema 2.11:

Se $f : (R^n, 0) \rightarrow (R^p, 0)$ satisfaz a $T_k f \supset m_n^r \theta_f$
 $g-f \in m_n^{r-k+1} \theta_f$, então $\exists \delta > 0$ tal que:

$f_t(x) = f(x) + t(g(x) - f(x))$ é C^0 - K -equivalente a $f(x)$, $|t| < \delta$.

Prova:

Podemos usar a Proposição 2.6 para provar que:

Dada uma deformação:

$$F : (R^n \times R, 0 \times 0) \rightarrow (R^p, 0)$$

$$(x, t) \mapsto F(t, x), \quad F(0, x) = f(x) \quad e$$

$$F(t, x) - F(0, x) \in m_1 m_n^{r-k+1} \theta_F \quad \text{então:}$$

$$tF(m_n^{k_\psi}_{n+1} + \hat{F}^*(m_p)m_n^{k-1} \theta_F \supseteq m_n^r \theta_F$$

(a demonstração é análoga ao lema 2.8).

Escolhendo $\rho(x) = |x|^{k-1}$, podemos repetir o mesmo argumento do Teorema 2.7 para obter v e w , campos de vetores em uma vizinhança do 0 em $R^n \times R$ e $R^n \times R^p \times R$, respectivamente, tal que:

$$\left\{ \begin{array}{ll} v(x, t) = \rho^{-1}(x) \xi(x, t) & \text{onde} \\ & \xi(x, t) = (\xi', \rho \circ \pi_{R^n}) \\ v(0, t) = \frac{\partial}{\partial t} & e \quad \xi'(x, t) \in m_n^{k_\psi}_{n+1} \end{array} \right.$$

$$e \quad \left\{ \begin{array}{ll} w(x, y, t) = \rho^{-1}(x) \eta(x, y, t) & \text{se } x \neq 0 \\ w(0, y, t) = \frac{\partial}{\partial t} \end{array} \right.$$

$$\text{onde } \eta(x, y, t) = (\xi' \circ \pi_{R^n \times R}, \eta'', \rho \circ \pi_{R^n})$$

$$e \quad \eta'' \in m_n^{k-1} m_p \theta_p.$$

Portanto: (a) as condições em ξ' e ρ implicam que:

$$\frac{|\xi'(x, t)|}{|\rho(x)|} \leq C_1 |x|$$

(b) as condições em η'' e ρ implicam que:

$$\frac{|\eta''(x, y, t)|}{|\rho(x)|} \leq C_2 |y|$$

Como antes, podemos redefinir w de forma que w seja zero fora de uma vizinhança cônica do gráfico de F . A unicidade de solução destes campos de vetores e a continuidade das soluções segue do teorema contido na exposição abaixo (Kuo [18]).

"Seja $X(x)$ um campo de vetores definido e contínuo em um subconjunto aberto U de R^n . Então existe pelo menos uma solução local por cada ponto de U .

Seja $\psi(t, u_0)$ uma solução definida para $|t| < \eta$ com $\psi(0, u_0) = u_0$. Dizemos que $X(x)$ satisfaz uma *condição de Lipschitz* ao longo de ψ com constante de Lipschitz $K = K(\psi)$ se para todo x em uma vizinhança do conjunto:

$$\{\psi(t, u_0) : |t| < \eta\}, \quad |X(x) - X(\psi(t, u_0))| < K|x - \psi(t, u_0)|$$

Esta condição é certamente mais fraca que a condição de Lipschitz usual.

Teorema:

Seja $X(x)$ um campo de vetores definido e contínuo em um conjunto U aberto de R^n . Suponha que para cada $u_0 \in U$

exista uma solução $\psi(t, u_0)$ com $\psi(0, u_0) = u_0$ ao longo da qual X satisfaz uma condição de Lipschitz. Então X admite uma única solução por cada ponto de U , isto é, duas soluções satisfazendo a mesma condição inicial coincidem em seu domínio comum de definição.

Além disso, a solução $\psi(t, u_0)$ definida em seu intervalo maximal de existência, é uma função contínua de t e u_0 .

§ 2.4. O Caso Homogêneo

Os Teoremas 2.7 e 2.11 quando aplicados aos germes $f : (R^n, 0) \rightarrow (R^p, 0)$, homogêneos de grau $\underline{s}$, dão origem ao resultado:

Corolário 2.12:

(a) Todo germe $f : (R^n, 0) \rightarrow (R^p, 0)$ homogêneo de grau $\underline{s}$ e finitamente determinado com respeito ao grupo K é $s-C^1-K$ -determinado.

(b) As deformações pequenas de grau s de f são C^0-K -triviais.

Prova:

Se f é homogêneo de grau $\underline{s}$ e K -finitamente determinado, existe k tal que

$$tf(m_{n, \theta}^k) + f^*(m_p)m_{n, \theta}^{k-1} = m_{n, \theta}^{s+k-1}$$

e o resultado segue dos Teoremas 2.7 e 2.11.

Seja $g(x) = f(x) + h(x)$ $g : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$, com f homogêneo de grau $\underline{s}$ e $h(x) \in m_n^{s+1} \theta_g$.

O Corolário acima diz, em particular, que uma condição suficiente para que $g^{-1}(0) \underset{C^1}{\sim} f^{-1}(0)$ é que f seja K -finitamente determinado.

Uma pergunta que surge naturalmente é se esta condição suficiente é genérica. A resposta é afirmativa e está contida na proposição abaixo.

Proposição 2.13:

Seja L o espaço das aplicações polinomiais homogêneas $f : C^n \rightarrow C^p$ de grau k . O conjunto $W(n,p) \subset L$,

$W(n,p) = \{f \in L, f \text{ não é finitamente determinado com respeito a } K\}$ é subconjunto algébrico próprio de L . Em outras palavras, o conjunto das formas homogêneas finitamente determinadas com respeito a K é um conjunto não-vazio, Zariski-aberto de L .

Prova:

Um germe $f : (E^n, 0) \rightarrow (E^p, 0)$ ($E = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) é finitamente K -determinado se e somente se

$$J(f) + f^*(m_p)C_n \supset m_n^{\ell}C_n$$

(Aqui, $J(f)$ é o ideal em C_n gerado pelos $p \times p$ menores da matriz df).

(Ver, por exemplo, Gaffney [10]).

Com a caracterização acima, é fácil ver que $W(n,p)$ é um conjunto algébrico.

Vamos mostrar que $L-W \neq \emptyset$.

Seja $A : C^n \times L \rightarrow C^p$, $A(x, f) = f(x)$

A é uma submersão em $(C^n \times L) - (0 \times L)$

Portanto, $A^{-1}(0) - 0 \times L$ é uma subvariedade de $C^n \times L$ de codimensão p . (é a união de todos os possíveis $f^{-1}(0)$ com $f \in L$).

Seja $\pi : A^{-1}(0) - (0 \times L) \rightarrow L$ a restrição da projeção usual e f_0 um valor regular de π .

Por construção, df_0 tem rank p em $f_0^{-1}(0) - \{0\}$.

Logo f_0 é K -finitamente determinado, como germe

$f_0 : (C^n, 0) \rightarrow (C^p, 0)$ (ver Gaffney [10]).

Definição 2.14:

Um germe $g : (R^n, 0) \rightarrow (R^p, 0)$ é semihomogêneo de grau d se:

$g(x) = f(x) + h(x)$, onde f é K -finitamente determinado, homogêneo de grau $\underline{d}$ e $h \in m_n^{d+1} \theta_g$.

Corolário 2.15:

$W_d^r(n, p) = \{z \in J_d^r(n, p) \text{ , } z = j^r g \text{ , } g = f+h, \text{ } f \text{ homogêneo de grau } \underline{d} \text{ e } h \in m_n^{d+1} \theta_f \text{ tal que } g \text{ não é } d\text{-}C^1\text{-}K\text{-determinado}\}$ é um subconjunto algébrico próprio de $J_d^r(n, p)$, $\forall r \geq d$.

Para germes semi-homogêneos um problema interessante é a determinação de seus invariantes a partir dos invariantes associados a sua parte homogênea.

Os resultados seguintes fazem parte de um projeto de generalização para $p > 1$ dos resultados obtidos por Arnol'd para germes de funções.

No teorema 2.17 obtemos formas normais para $g = f + h$, analogamente ao resultado de Arnol'd, para germes semi-quase-homogêneos [3].

Acreditamos que estes resultados sejam úteis no estudo da K -modalidade.

(ver, por exemplo Wall [33]).

Proposição 2.16:

Seja $\tau = \{\mu_1, \dots, \mu_\ell, \tau_1, \dots, \tau_m\}$ uma base monomial pa

ra $N_f K_e = \frac{\theta_f}{tf(\theta_n) + f^*_{m_p} \theta_f}$ onde f é homogêneo de grau d ;

grau $\mu_i \leq d$

grau $\tau_j \geq d+1$

Seja $g = f+h$, semi-homogêneo de grau $\underline{d}$.

Então:

(a) τ gera $N_g K_e$

(b) Se $g_t(x) = f(x) + th(x)$ com h homogêneo de grau $d' > d$.

Então: $\dim N_{g_t} K_e$ é constante para $t \neq 0$ e

$g_t(x) \underset{K}{\sim} f(x) + h(x) = g(x)$ para todo $t > 0$.

$g_t(x) \underset{K}{\sim} f(x) - h(x)$ para $t < 0$.

(c) Com as hipóteses de (b), se $\dim_R N_f K_e = \dim_R N_g K_e$ então $g \underset{K}{\sim} f$, ou seja, g_t é K -trivial.

Prova:

(a) Por hipótese $tf(\theta_n) + f^* m_p \theta_f + R\tau = \theta_f$.

É imediato que os termos μ_i de grau $\leq d-2$ geram

$$\frac{N_{g e} + m_n^{d-1} \theta_g}{m_n^{d-1} \theta_g} \approx \frac{\theta_f}{m_n^{d-1} \theta_f}.$$

Indiquemos por τ^j o subconjunto de τ constituído dos monômios de grau exatamente j .

É claro que:

$$tg(\theta_n) + g^* m_p \theta_g + m_n^d \theta_g + R\tau^{d-1} = m_n^{d-1} \theta_g$$

$$tg(m_n \theta_n) + g^* m_p \theta_g + m_n^{d+1} \theta_g + R\tau^d = m_n^d \theta_g$$

⋮

$$tg(m_n^k \theta_n) + g^* m_p m_n^{k-1} \theta_g + m_n^{d+k} \theta_g + R\tau^{d+k-1} = m_n^{d+k-1} \theta_g$$

onde k é tal que $T_k(f) = T_k(g) \supseteq m_n^{d+k} \theta_g$ (Proposição 2.5).

Então

$$tg(\theta_n) + g^* m_p \theta_g + R(\cup \tau^j) = m_n^{d-1} \theta_g \quad \text{para } j \geq d-1$$

(b) É suficiente mostrar que a dimensão das órbitas em $J^{d+k-1}(n,p)$ é independente de t (se $t \neq 0$).

Para cada t :

$$\psi_t : \frac{m_n^d \theta_f}{tf(m_n \theta_n) + f^* m_p \theta_f + m_n^{d+k} \theta_f} \approx R\{\tau_1, \dots, \tau_m\} \rightarrow \frac{m_n^d \theta_{g_t}}{tg_t(m_n \theta_n) + g_t^* m_p \theta_{g_t} + m_n^{d+k} \theta_{g_t}}$$

onde

$\psi_t[\sum_{i=1}^r a_i \tau_i + a] = \sum a_i \tau_i$ está bem definida (pela parte (a)) e é sobre.

Vamos mostrar que $\dim \ker \psi_t$ independe de t (para $t \neq 0$):

Por simplicidade de notação suporemos $g_t = f + th$, com h homogêneo de grau $(d+1)$.

Seja $\tau_{i_1}, \tau_{i_2}, \dots, \tau_{i_r}$ um subconjunto de $\{\tau_1, \dots, \tau_m\}$ e suponha que existam $\xi \in m_n^\theta$, $\eta_i \in \theta_{g_t}$, $i = 1, \dots, p$ tais que:

$$tg_t(\xi) + \sum_{i=1}^p (g_t)_i \eta_i = a_1 \tau_{i_1} + a_2 \tau_{i_2} + \dots + a_r \tau_{i_r} \quad (*)$$

Indiquemos por $\varepsilon^1 + \varepsilon^2 + \dots + \varepsilon^\ell$ a decomposição de ε em partes homogêneas de graus $1, 2, \dots, \ell$ e analogamente, cada $\eta_i = \eta_i^1 + \eta_i^2 + \dots + \eta_i^\ell$ onde η_i^j tem grau $j-1$.

Então, (*) pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} & [tf(\varepsilon^1) + f\eta^1] + [t(th(\varepsilon^1) + h\eta^1) + tf(\varepsilon^2) + f\eta^2] + \\ & + [t(th(\varepsilon^2) + h\eta^2) + tf(\varepsilon^3) + f\eta^3] + \dots + \\ & + [t(th(th(\varepsilon^{\ell-1}) + h\eta^{\ell-1}) + tf(\varepsilon^\ell) + f\eta^\ell] + [t(th(\varepsilon^\ell) + h\eta^\ell)] = \sum a_k \tau_{i_k} \end{aligned}$$

Ou seja, as equações homogêneas são respectivamente:

$$tf(\varepsilon^1) + f\eta^1 = 0 \quad (\text{pois } \tau \text{ é base de } N_e K_f)$$

$$t(th(\varepsilon^1) + h\eta^1) + tf(\varepsilon^2) + f\eta^2 = (\sum a_k \tau_{i_k})^{d+1} \quad (\text{soma dos } \tau_{i_k} \text{ de grau } d+1)$$

$$t(th(\varepsilon^2) + h\eta^2) + tf(\varepsilon^3) + f\eta^3 = (\sum a_k \tau_{i_k})^{d+2} \quad (\text{soma dos } \tau_{i_k}'\text{'s de grau } d+2)$$

$\vdots$

$$t(th(\varepsilon^{\ell-1}) + h\eta^{\ell-1}) + tf(\varepsilon^\ell) + f\eta^\ell = (\sum a_k \tau_{i_k})^{d+\ell-1} \quad (\tau_{i_k}'\text{'s de grau } d+\ell-1)$$

$$t[th(\varepsilon^\ell) + h\eta^\ell] = (\sum a_k \tau_{i_k})^{d+\ell} \quad (\tau_{i_k}'\text{'s de grau } d+\ell)$$

Definamos:

$$\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}^{-1} + \bar{\varepsilon}^{-2} + \dots + \bar{\varepsilon}^{-\ell}$$

e

$$\bar{\eta}_i = \bar{\eta}_i^{-1} + \bar{\eta}_i^{-2} + \dots + \bar{\eta}_i^{-\ell}$$

onde $\bar{\varepsilon}^{-\ell-j} = \frac{t^{j+1}}{\bar{t}^j} \varepsilon^{-\ell-j} \quad j = 0, 1, \dots, \ell-1.$

Então:

$$\begin{aligned} \bar{t} [th(\bar{\varepsilon}^{-\ell-j}) + h\bar{\eta}^{-\ell-j}] + [tf(\bar{\varepsilon}^{-\ell-j+1}) + f\bar{\eta}^{-\ell-j+1}] &= \bar{t} [th(\frac{t^{j+1}}{\bar{t}^j} \varepsilon^{-\ell-j}) + h(\frac{t^{j+1}}{\bar{t}^j} \eta^{-\ell-j})] + \\ + [tf(\frac{t^j}{\bar{t}^{j-1}} \varepsilon^{-\ell-j+1}) + f(\frac{t^j}{\bar{t}^{j-1}} \eta^{-\ell-j+1})] &= \frac{t^j}{\bar{t}^{j-1}} [t(th(\varepsilon^{-\ell-j}) + h\eta^{-\ell-j}) + tf(\varepsilon^{-\ell-j+1}) + \\ + f\eta^{-\ell-j+1}] &= [(\sum a_k \tau_{i_k})^{d+\ell-j}] \cdot \frac{t^j}{\bar{t}^{j-1}} = \sum \bar{a}_k \tau_{i_k} \end{aligned}$$

Ou seja:

$$tg_{\bar{t}}(\bar{\varepsilon}) + \sum_{i=1}^p (g_{\bar{t}}) \bar{\eta}_i = \sum \bar{a}_k \tau_{i_k}.$$

$\therefore \dim N_{g_t} K_e$ é constante para $t \neq 0$.

Além disso, $h(x) \in tg_t(m_{n\theta n}) + g_t^* m_{p\theta} g_t + m_{n\theta}^{d+k} g_t \quad \forall t \neq 0$.

Pelo Lema 1.27, segue-se que existem no máximo duas K -órbitas: a de $f+h$, e a de $f-h$.

(c) É claro que f pertence ao fecho de $K(f+h)$ e ao fecho de $K(f-h)$.

Portanto, se $\dim N_g K_e = \dim N_f K_e$, segue-se que a deformação $f+th$ é trivial.

Teorema 2.17:

Seja $\tau = \{\mu_1, \dots, \mu_\ell; \tau_1, \dots, \tau_m\}$ uma base monomial

para $N_f K_e = \frac{\theta_f}{tf(\theta_n) + f^* m_p \theta_f}$, onde f é homogêneo de grau d ,

grau $\mu_i \leq d$ e grau $\tau_j \geq d+1$.

Então

(i) Qualquer germe semi-homogêneo $g = f+h$ é K -equivalente a

$$f + \sum_{i=1}^m a_i \tau_i, \quad a_i = \text{constante}$$

(ii) e $g = f+h$ é C^{s+1} - K -equivalente a $f + \sum a_i \tau_i$ com
 $d+1 \leq \text{grau } \tau_i \leq d+s$.

Consideremos primeiramente o caso em que $h(x)$ pertence ao espaço tangente de f :

Lema 2.18:

Com as hipóteses do Teorema 2.17, suponhamos que h é homogêneo de grau $d+s$ e $h(x) \in tf(m_n^{s+1} \theta_n) + (f^* m_p) m_n^s \theta_f$.

Então $f+h$ é C^{s+1} - K -equivalente a f .

Prova do lema:

Temos $h(x) = tf(\varepsilon(x)) + \sum_{i=1}^p f_i(x) \eta_i(x)$ com $\varepsilon \in m_n^{s+1} \theta_n$

$$\eta_i \in m_n^s \theta_f$$

Seja $H(X) = I - N(X)$, onde I é a matriz identidade

$$p \times p, \quad N(x) = \begin{bmatrix} n_1(x) \\ \vdots \\ n_p(x) \end{bmatrix}_{p \times p}$$

$$\text{e } X = x - \epsilon(x).$$

$$\text{Seja } g(X) = f(X) + h(X).$$

Então $H(X)g(X) = k(X)$ exprime uma K -equivalência entre g e k .

Além disso, o desenvolvimento de Taylor de $k(X)$ em potências de ϵ é o seguinte:

$$k(X) = [I - N(x - \epsilon(x))][f(x - \epsilon(x)) + h(x - \epsilon(x))] =$$

$$= f(x) - tf(x)\epsilon(x) - N(x)f(x) + h(x) + R(x), \text{ com}$$

$$R(x) \in m_n^{d+s+1} \theta_g, \quad k(x) = f(x) + R(x).$$

$$\text{Logo } g(x) = f(x) + h(x) \text{ é } K\text{-equivalente a } f(x) + R(x), \\ R \in m_n^{d+s+1} \theta_g.$$

$$\text{Do Teorema 2.7, obtemos que } g \underset{K}{\sim} f + h \underset{C^{s+1}_{-K}}{\sim} f$$

Observemos que a homogeneidade de f não é essencial na prova do lema anterior. Ou seja, ficou também provado que:

Lema 2.19:

Dados $g(x) = f(x) + k(x)$, semi-homogêneo de grau d , com $k(x)$ polinômio de grau $\leq d+s$ e $h(x)$, polinômio homogêneo de grau $d+s$, $h(x) \in T_g^K$ então

$g(x) + h(x) = f(x) + k(x) + h(x)$ é C^{s+1} -K-equivalente a $f(x) + k(x) + R(x)$, com $R(x) \in m_n^{d+s+1} \theta_g$.

A Prova do Teorema é imediata a partir da aplicação dos lemas 2.18 e 2.19 aos termos de h de ordem $d+1$, $d+2$ e assim sucessivamente, e do Teorema 2.7.

§ 2.5. Exemplos

Exemplo 2.20:

$$f(x, y) = x^m + y^n \quad m \leq n, \quad m, n \geq 4$$

f é quase-homogênea.

$$\text{Seja } I = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right\rangle.$$

Temos:

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right\rangle m_2^{m-2} \supseteq m_2^{m+n-3}.$$

Então f é $(m+n-4)$ -determinado com respeito a K (também com respeito a R, A) e como $x^{m-2}y^{n-2} \notin \text{Im}_2$, f não pode ser $(m+n-5)$ -K-determinado.

No entanto, $\forall g$ tal que $j^n g(0) = j^n f(0)$, g também é $(m+n-4)$ -determinado (Proposição 2.5).

Pelo Teorema 2.7, f é n -determinado com respeito ao grupo C^1 -K; (ou C^1 -R ou C^1 -A); é $(n+1)$ -determinado com respeito ao grupo C^2 -K; (ou C^2 -R, ou C^2 -A) ..., é $(n+\ell)$ -determinado com respeito ao grupo $C^{\ell+1}$ -K ($C^{\ell+1}$ -R, ou $C^{\ell+1}$ -A) para $\ell < m-4$.

Estas estimativas são exatas. Com efeito é suficiente observar que

$x^m + y^n + x^{m-2}y^{n-2-s}$ não é $C^{\ell+1}$ -equivalente a $x^m + y^n$, onde $\ell = m-s-4$, pois

$x^{m-2}y^{n-2-s} \notin \langle x^{m-1}, y^{n-1} \rangle_{m_n \theta_n^{(\ell+1)}}, (\theta_n^{(\ell+1)})$, indica campos de classe $C^{\ell+1}$).

(ou seja: $x^{m-2}y^{n-2-s} \notin j^{n+\ell+1}\{\langle x^{m-1}, y^{n-1} \rangle_{m_n \theta_n}\}$)

Exemplo 2.21:

$f : (R^3, 0) \rightarrow (R^2, 0)$ dada por:

$$\begin{cases} u(x, y, z) = 2x^3 + 3y^3 - z^3 \\ v(x, y, z) = xyz \end{cases}$$

Temos:

$$Df = \begin{bmatrix} 6x^2 & 9y^2 & -3z^2 \\ yz & xz & xy \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} e \quad J(f) &= \langle 6x^3z - 9y^3z, 6x^3y + 3yz^3, 9xy^3 + 3xz^3 \rangle \\ &\quad \begin{matrix} " & " & " \\ \Delta_1 & \Delta_2 & \Delta_3 \end{matrix} \end{aligned}$$

De:

$$\left\{ \begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix} \right\} \cdot \{J(f)\} \quad \text{segue-se que } \{x^4z, xz^4, x^4y, xy^4, y^4z, z^4y\}_{\theta_f}$$

todos pertencem a $T_3^f = tf(m_3^3 \theta_3) + f^*(m_2)m_2^2 \theta_f$

Os demais termos da forma $\begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix}$ onde $a \in m_3^5$

podem ser obtidos da seguinte maneira:

$$tf(x^3, 0, 0) = \begin{bmatrix} 6x^5 \\ x^3 y z \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} x^5 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ em } T_3(f)$$

$$\text{Simetria vai implicar que } \begin{bmatrix} y^5 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} z^5 \\ 0 \end{bmatrix} \in T_3 f$$

Estes elementos, juntamente com as 6-equações:

$$\begin{cases} z\Delta_1 \equiv 0 \pmod{T_3 f} & y\Delta_2 \equiv 0 \pmod{T_3 f} & x\Delta_3 \equiv 0 \pmod{T_3 f} \\ uy^2 \equiv 0 & ux^2 \equiv 0 & uz^2 \equiv 0 \end{cases}$$

vão mostrar que

$$\begin{bmatrix} x^3 y^2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x^2 y^3 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x^3 z^2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x^2 z^3 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y^2 z^3 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y^3 z^2 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ pertencem a } T_3 f.$$

$$\text{Para os termos da forma } \begin{bmatrix} 0 \\ a \end{bmatrix} \text{ com } a \in m_3^5, \text{ temos:}$$

$$tf(yz, 0, 0) = \begin{bmatrix} 6x^2 yz \\ y^2 z^2 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 0 \\ y^2 z^2 \end{bmatrix} \pmod{T_3 f}$$

$$\text{Por simetria: } \begin{bmatrix} 0 \\ x^2 z^2 \end{bmatrix} \in T_3 f \text{ e } \begin{bmatrix} 0 \\ x^2 y^2 \end{bmatrix} \in T_3 f$$

$$\therefore \text{tf}(m_3^3 \theta_3) + f^*(m_2)m_3^2 \theta_f \supset m_3^5 \theta_f$$

$\therefore f$ é 4-determinado com respeito a K (Proposição 2.2)

e f não é 3-determinado com respeito a K pois

$$\begin{bmatrix} 0 \\ y^4 \end{bmatrix} \notin T_f K, \text{ por exemplo.}$$

Pelo Teorema 2.7, f é 3-determinado com respeito a C^1-K .

Pelo Teorema 2.11, deformações pequenas de grau 3 são C^0-K -triviais.

O mesmo argumento utilizado no exemplo anterior mostra que f não é 3-determinado com respeito a C^2-K .

Exemplo 2.22:

Seja $f : (R^3, 0) \rightarrow (R^2, 0)$

$$f(x, y, z) = \begin{cases} ax^4 + by^4 + cz^4 \\ xyz \end{cases}$$

De maneira inteiramente análoga ao Exemplo 2.21, segue-se que:

$$\text{tf}(m_3^2 \theta_3) + f^*(m_2)m_3 \theta_f \supset m_3^6 \theta_f \quad \text{para quase todo valor}$$

de (a, b, c)

$\therefore$ (a) f é 5- K -determinado e não é 4- K -determinado

(b) f é 4- C^1-K -determinado.

Além disso, esta é uma propriedade do 4-jato, ou seja:

$\forall g$ tal que $g(x) = f(x) + h(x)$, $h \in m_2^5 \theta_f$,

g também satisfaz (a) e (b).

Exemplo 2.23:

$$\text{Seja } f(x,y) = \begin{cases} x^a + y^b & 2 \leq a \leq b \\ x^a - y^b \end{cases}$$

$$I(f) = \langle x^a + y^b, x^a - y^b \rangle = \langle x^a, y^b \rangle_{m_2^{a-1}} \supseteq m_2^{b+a-1} C_2$$

$\therefore f$ é $b+a-2$ -determinado com respeito a K .

Observe a analogia com o exemplo 2.20.

De fato f não é $a+b-3-K$ -determinado

f é b -determinado c.r. a C^1-K ,

f é $b+1$ -determinado c.r. a C^2-K , ... e

f é $b+l$ -determinado c.r. a C^l-K (desde que $l < a-2$).

CAPÍTULO III

GRAU DE C^k -DETERMINAÇÃO DE GERMES QUE SATISFAZEM A UMA CONDIÇÃO DE LOJASIEWICZ

§ 3.1. Introdução

Se G é um dos grupos R, C, K, L ou A podemos definir os correspondentes C^k - G , substituindo os difeomorfismos de classe C^∞ da definição de G por difeomorfismos de classe C^k ($k \geq 1$) ou por homeomorfismos ($k = 0$).

O estudo da C^0 - R -determinação finita começou com os trabalhos de Kuiper [17], Kuo [18] sobre suficiência de jatos de funções. Bochnak e Lojasiewicz [22] obtiveram várias condições equivalentes à r - C^0 - R -determinação de funções, e seus resultados foram posteriormente estendidos para $G = R$ e K e $p > 1$, por Bochnak, Kuo e outros.

Uma apresentação bastante clara e detalhada destes resultados está contida, no trabalho de J. Martins [25], o qual também obtém um resultado de C^r - R -determinação finita ($p > 1$), que é uma generalização do resultado de F. Takens [29].

Recentemente, L. Wilson [34] e [35] estudou a determinação infinita, isto é, a determinação de um germe pela sua série de Taylor e sua relação com a C^k -determinação finita.

Para o caso dos grupos R, C, K, L , todos estes trabalhos levaram ao seguinte:

Teorema:

Seja $f : (R^n, 0) \rightarrow (R^p, 0)$ ∞ -determinado relativamente a C^0 -G ($G = R, C, K, L$).

Então existem inteiros $A, B > 0$ tais que:
 f é $(Ak+B)$ -determinado relativamente a C^k -G para todo k ,
 $0 \leq k \leq \infty$.

Esta relação entre a determinação infinita e a C^k -de terminação finita é proveniente principalmente da equivalência entre o *conceito de ideal elíptico* I e da existência de um elemento em I satisfazendo a uma *condição de Losajewicz*:

Mais precisamente, vale o seguinte resultado:

Proposição:

Dado $I = \langle f_1, \dots, f_s \rangle$ um ideal finitamente gerado de C_n , as seguintes condições são equivalentes:

(a) I é *elíptico*, isto é, $I \supset m_n^\infty C_n$

(b) Existe uma função ϕ , definida numa vizinhança U de 0, com germe em I , tal que $|\phi(x)| \geq C|x|^\alpha$ em U , para algum $C > 0$ e algum $\alpha > 0$ (Esta condição é chamada *condição de Lojasiewicz*)

(c) Os geradores f_i de I satisfazem uma desigualdade $\sum_{i=1}^s (f_i)^2 \geq C|x|^\alpha$ em uma vizinhança do zero.

Se f_i são germes de funções analíticas, estas condições são também equivalentes a:

(d) 0 é ponto singular isolado em $f^{-1}(0)$
 (onde $f = (f_1, \dots, f_s)$).

A implicação (a) $\implies$ (c) segue de Tougeron [30] e (d) $\implies$ (c) é a Desigualdade de Lojasiewicz para funções analíticas.

A prova completa deste resultado pode ser vista, por exemplo, em C.T.C. Wall [32]: "Finite Determinacy of Smooth Map-Germs".

Neste artigo, Wall descreve e analisa todos estes resultados e apresenta uma completa lista de referências.

Em seu Teorema 8.1 (p. 524) do mesmo artigo, Wall enuncia uma estimativa para o grau de C^k -G-determinação ($G = \mathbb{R}$, $\mathbb{K}$, ou $\mathbb{C}$), que está incorreta. Este erro foi apontado por Leslie Wilson, que foi também quem nos sugeriu que as informações contidas no espaço tangente $T_f G$ poderiam ser melhor utilizadas para a obtenção de estimativas mais precisas do grau de C^k -G-determinação.

Recentemente, Leslie Wilson e C.T.C. Wall nos comunicaram sobre dois trabalhos a respeito do grau de C^k -K-determinação:

Ph. Antoine em [1], provou que sob certas condições de regularidade sobre uma aplicação $f : E \rightarrow F$, $f(0) = 0$, E, F espaços de Banach, tem-se: $f^{-1}(0)$ e o cone $\{x \mid x \in \ker df(0), d^k f(0)(x)^k \in \text{Im} df(0)\}$ são C^1 -difeomorfos.

Uma consequência deste resultado é a s - C^1 -K-determinação finita de germes homogêneos de grau s que satisfazem à condição de regularidade.

D. Lefebvre e M.T. Pourprix em [21] generalizam o resultado acima obtendo uma estimativa para o grau de C^k -K-determinação.

No § 3.2 comparamos os resultados de [21], com as estimativas que obtemos neste capítulo.

§ 3.2. Grau de C^r -Determinação

Seja $f : (R^n, 0) \rightarrow (R^p, 0)$ germe de aplicação diferenciável de classe C^∞ e $G = R, C$ ou K .

Seguindo a notação utilizada por Wall em [32], indiquemos por: $I_R(f) = J_f$ o ideal de C_n gerado pelos menores $p \times p$ da matriz jacobiana de f ,

$$I_C(f) = f^*(m_p)C_n$$

e

$$I_K(f) = I_R(f) + I_C(f)$$

$$\text{Seja } N_C(f)(x) = |f(x)|^2$$

$$N_R(f)(x) = |df_x|_R^2 = \det\{(df_x)(df_x)^t\} = \text{soma dos quadrados dos menores } p \times p \text{ de } df_x.$$

$$N_K(f)(x) = N_C(f)(x) + N_R(f)(x)$$

Suponhamos que $N_G(f)$ satisfaça a uma desigualdade de Lojasiewicz numa vizinhança de 0, isto é: $\exists$ constantes $C > 0$ e $r > 0$ tais que:

$$(C_r) \quad N_G(f)(x) \geq C|x|^r$$

Como no Capítulo anterior, a informação contida no espaço tangente $T_f G$ será usada para construir os campos de vetores, cuja classe de diferenciabilidade é obtida com o auxílio de uma função de controle, que neste caso será $N_G(f)$.

Para a obtenção de estimativas razoáveis do grau de C^r -determinação é necessário impor a $N_G(f)$ alguma condição de

controle do crescimento da derivada de $\frac{1}{N_G(f)}$, como por exemplo:

$$\left| \frac{\text{grad } N_G(f)}{N_G(f)} \right| \leq \frac{C}{|x|^\lambda} \quad \text{para algum } \lambda \geq 1.$$

O exemplo seguinte é devido a Leslie Wilson:

Exemplo 3.1:

$$f_{\alpha\beta}(x) = x^\alpha \sin \frac{1}{x^\beta} \quad \text{satisfaz a } |f_{\alpha\beta}(x)| \leq |x|^\alpha,$$

mas não é de classe C^α para valores convenientes de β .

Indiquemos, portanto, por (d_{r_0}) a seguinte hipótese:

r_0 é o maior inteiro tal que $N_G(f) \in m_n^{r_0}$.

O seguinte lema é uma extensão do lema 2.9:

Lema 3.2:

Suponha que $N(x)$ satisfaça às condições (c_r) e (d_{r_0}) .

Se $h(x) \in m_n^{r+i(r-r_0+1)+1}$, a função

$$\varepsilon(x) = \frac{h(x)}{N(x)}, \quad x \neq 0 \quad \varepsilon(0) = 0 \quad \text{é de classe } C^i.$$

Prova:

É claro que $r - r_0 \geq 0$.

Logo $|\varepsilon(x)| = \frac{|h(x)|}{|N(x)|} \leq C|x|$ e ε é contínua.

Além disso:

$$\text{grad}\varepsilon(x) = \frac{\text{grad}h(x)}{N(x)} - \frac{h\text{grad}N(x)}{N^2(x)}$$

onde $\text{grad}h(x) \in m_n^{r+i(r-r_0+1)}$ e $\text{grad}N(x) \in m_n^{r_0-1}$.

Para $i \geq 1$, temos: $r+i(r-r_0+1)+1+r_0-1-2r \geq (i-1)(r_0-1)+1 \geq 1$

$$\therefore |\text{grad}\varepsilon(x)| \leq \left| \frac{N(x)\text{grad}h(x)}{N^2(x)} \right| + \left| \frac{h\text{grad}N(x)}{N^2(x)} \right|$$

e segue-se que $\text{grad}\varepsilon(x)$ é contínuo.

Para mostrar que $\text{grad}\varepsilon(x)$ é C^1 , observemos que cada uma de suas componentes é da forma $\frac{h'(x)}{N^2(x)}$, onde $h' \in m_n^\ell$,

$\ell = 2r+(i-1)(r-r_0+1)+1$ e N satisfaz as mesmas condições.

Por indução, se $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = \alpha-1$ e

$$\frac{\partial^{\alpha-1} \varepsilon(x)}{\partial_{x_1}^{\alpha_1} \partial_{x_2}^{\alpha_2} \dots \partial_{x_n}^{\alpha_n}} \text{ é da forma } \frac{H(x)}{N^\alpha(x)}, \text{ com } H \in m_n^\ell,$$

$\ell = \alpha r + (i-\alpha+1)(r-r_0+1)+1$.

Então:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{H(x)}{N^\alpha(x)} \right] &= \frac{\frac{\partial H}{\partial x_j}}{N^\alpha(x)} - \frac{\alpha H(x) N^{\alpha-1} \frac{\partial N}{\partial x_j}}{N^{2\alpha}} \\ &= \frac{N \frac{\partial H}{\partial x_j} - \alpha H(x) \frac{\partial N}{\partial x_j}}{N^{\alpha+1}} \end{aligned}$$

é contínua, sempre que $i - \alpha + 1 \geq 1$, isto é: $i \geq \alpha$.

Portanto, ε é de classe C^α .

Com este lema já é possível enunciar uma versão correta do Teorema 8.1 de [32]:

Proposição 3.3:

Seja $G = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ou K e suponha que f satisfaça às hipóteses (c_r) e (d_{r_0}) . Então f é ℓ - C^i - G -determinado, onde $\ell = r + i(r - r_0 + 1)$ para $0 \leq r \leq \infty$.

A prova desta Proposição é essencialmente a mesma dada por Wall em [32] (Teorema 8.1), que é também análoga à prova da Proposição 3.6 que daremos a seguir, e portanto, a omitimos.

A estimativa da Proposição 3.3 é ainda muito imprecisa. Por exemplo se f é homogênea de grau m , a condição (c_r) só ocorre para $r \geq \min\{(m-1)p, 2m\}$.

No Lema 3.4 repetiremos a prova de $J_f^{\theta_f} \subset \text{tf}(\theta_n)$ (Gaffney [10] ou Wall [32]), que será importante para a obtenção de resultados mais precisos.

Lema 3.4:

$$\text{Seja } h = \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_p \end{bmatrix} \in \theta_f$$

$$\text{Se } M = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_{i_1}} & \frac{\partial f_1}{\partial x_{i_2}} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_{i_p}} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_{i_1}} & \frac{\partial f_2}{\partial x_{i_2}} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_{i_p}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_{i_1}} & \frac{\partial f_p}{\partial x_{i_2}} & \dots & \frac{\partial f_p}{\partial x_{i_p}} \end{bmatrix}_{p \times p}$$

é um menor $p \times p$ de df_x , então:

$$(\det M) \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_p \end{bmatrix} = \text{tf} \left[\sum_{s=1}^p \sum_{r=1}^p \left[\text{cof} \left(\frac{\partial f_r}{\partial x_{i_s}} \right) h_r \right] \frac{\partial}{\partial x_{i_s}} \right] \quad (*)$$

Demonstração:

$$(\det M) \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_p \end{bmatrix} = (\det M) I \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_p \end{bmatrix} = M \cdot \hat{M} \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_p \end{bmatrix}$$

onde I = matriz identidade $p \times p$ e

$$\hat{M} = \text{cof}(M^t)$$

Então:

$$M \cdot \hat{M} \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_p \end{bmatrix} = \text{tf} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \text{cof}\left(-\frac{\partial f_1}{\partial x_{i_1}}\right)h_1 + \text{cof}\left(-\frac{\partial f_2}{\partial x_{i_2}}\right)h_2 + \dots + \text{cof}\left(-\frac{\partial f_p}{\partial x_{i_1}}\right)h_p \\ \text{cof}\left(-\frac{\partial f_1}{\partial x_{i_2}}\right)h_1 + \text{cof}\left(-\frac{\partial f_2}{\partial x_{i_2}}\right)h_2 + \dots + \text{cof}\left(-\frac{\partial f_p}{\partial x_{i_2}}\right)h_p \\ \vdots \\ \text{cof}\left(-\frac{\partial f_1}{\partial x_{i_p}}\right)h_1 + \text{cof}\left(-\frac{\partial f_2}{\partial x_{i_p}}\right)h_2 + \dots + \text{cof}\left(-\frac{\partial f_p}{\partial x_{i_p}}\right)h_p \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

(as linhas de índice k , com $k \neq i_s$ são nulas).

Lema 3.5:

Seja $N(x)$ definida por:

$$N(x) = \sum_{j=1}^L (d_j(x))^2 \quad e$$

Suponha que $N(x)$ satisfaça às hipóteses

$$(c_{2r}) \quad e \quad (d_{2r_0})$$

Dada $h(x)$ uma função de classe C^∞ , com $h(x) \in m_n^\ell$,
 $\ell = r+i(r-r_0+1)+1$. Então:

$$\varepsilon(x) = \frac{h(x)d(x)}{N(x)} \quad \text{é de classe } C^i, \text{ (onde}$$

$$d(x) = d_j(x) \text{ para qualquer } j = 1, \dots, L.)$$

Prova:

Como $|d(x)| = |d_j(x)| \leq (N(x))^{1/2}$, temos:

$$|\varepsilon(x)| \leq \frac{|h(x)|}{[N(x)]^{1/2}} \leq C|x|^{r+i(r-r_0+1)+1-r}$$

$\therefore \varepsilon(x)$ é contínua para $\forall i \geq 0$.

Para provar que $\varepsilon(x) \in C^1$, observemos que:

$$\frac{\partial \varepsilon(x)}{\partial x_j} = \frac{\frac{\partial h}{\partial x_j}(x)d(x)}{N(x)} + \frac{h(x) \frac{\partial d(x)}{\partial x_j}}{N(x)} - \frac{h(x)d(x) \frac{\partial N}{\partial x_j}}{[N(x)]^2}$$

$$\text{Como } \frac{\partial N}{\partial x_j} = 2 \sum_{i=1}^L d_i(x) \frac{\partial d_i}{\partial x_j}, \text{ segue-se que } \frac{\partial \varepsilon(x)}{\partial x_j}$$

é uma combinação linear de funções da forma $\frac{H(x)D(x)}{N^2(x)}$, on

de $H \in m_n^\ell$, $\ell = r+i(r-r_0+1)+1+(r_0-1)$ e $|D(x)| \leq C|N(x)|$.

Mais precisamente, $D(x) = \sum a_{ij} d_i d_j$.

Como $\left| \frac{H(x)D(x)}{N^2(x)} \right| \leq C \frac{|H(x)|}{|N(x)|}$, segue-se que

$\frac{\partial \epsilon(x)}{\partial x_j}$ é contínua para $i \geq 1$.

Por indução: Dada $\epsilon(x) = \frac{H(x)D(x)}{N^\alpha(x)}$, onde

$H(x) \in m_n^\ell C_n$, $\ell = [r+i(r-r_0+1)+1] + (\alpha-1)(r_0-1)$, $i \geq \alpha-1$ e

$D(x) = p^\alpha(d_i)$, isto é, um polinômio de grau α nas variáveis

d_i , $i = 1, \dots, L$.

Então:
$$\frac{\partial \epsilon(x)}{\partial x_j} = \frac{\frac{\partial H(x)}{\partial x_j} D(x) + H(x) \frac{\partial D(x)}{\partial x_j}}{N^\alpha(x)} - \frac{\alpha H(x) D(x) \frac{\partial N}{\partial x_j}}{N^{\alpha+1}(x)}$$

portanto, uma combinação linear de termos da forma $\frac{\tilde{H} \cdot \tilde{D}}{N^{\alpha+1}(x)}$,

onde $\tilde{H} \in m_n^\ell C_n$, $\begin{cases} \ell = r+i(r-r_0+1)+1+\alpha(r_0-1), & \text{e } D(x) = p^{\alpha+1}(d_i). \\ \text{com } i \geq \alpha \end{cases}$

Logo: $\left| \frac{\tilde{H} \cdot \tilde{D}}{N^{\alpha+1}(x)} \right| \leq \frac{|\tilde{H}|}{|N|^{(\alpha+1)/2}} \leq C |x|^k$

onde $k \geq r + \alpha(r-r_0+1) + 1 + \alpha(r_0-1) - (\alpha+1)r = 1$ ou seja,

$\frac{\partial \epsilon(x)}{\partial x_j}$ é contínua, o que completa a demonstração.

Usando os Lemas 3.4 e 3.5, é possível obter uma melhor estimativa para o grau de C^i -G-determinação.

Proposição 3.6:

Seja $f : (R^n, 0) \rightarrow (R^p, 0)$ tal que $N_G(f)$ satisfaz às condições (c_{2r}) e (d_{2r_0}) .

Então:

- (a) f é $r+i(r-r_0+1)$ - C^i -G-determinado, $i \geq 1$.
- (b) Deformações pequenas de f de grau $\geq r+1$ são C^0 -G-triviais.

Prova:

Seja g tal que $j^\ell g = j^\ell f$, $\ell = r+i(r-r_0+1)$.

Para o caminho $F(t, x) = (t, f_t(x))$, onde

$f_t(x) = f(x) + t(g(x) - f(x))$ estão satisfeitas as condições:

- (i) $f_t^*(m_p)C_n = f^*(m_p)C_n + m_n^{r+2}C_n$ para todo t , $i \geq 1$.
- (ii) $I_R(f_t) = I_R(f) + m_n^{r+1}C_n$, $\forall t$.

Portanto,

$$N_G(f_t) + \varepsilon_t(x) = N_G(f) \quad \text{onde} \quad \varepsilon_t \in m_n^{2r+2}C_n, \quad \forall t.$$

Ou seja

$$N_G(f_t) \geq N_G(f) - C_1 |x|^{2r+2}$$

$$\therefore N_G(f_t) \geq C |x|^{2r}$$

Seja $h(x) = g(x) - f(x)$.

$$\text{Então: } N_{\mathcal{R}(f_t(x))}h(x) = \sum_{j=1}^L \left[df_t(*\hat{M}_t^J(\det M_t^J)h(x)) \right]$$

onde J enumera os possíveis menores $p \times p$ de $d(f_t)_x$ e

$$*\hat{M}_t^J h = \sum_{s=1}^p \sum_{r=1}^p \left[\text{cof} \frac{\partial f_r}{\partial x_{i_s}} h_r \right] \frac{\partial}{\partial x_{i_s}}, \text{ como no Lema 3.4.}$$

Além disso:

$$N_C(f_t)h(x) = \sum_{i=1}^p \left[(f_t)_i h(x) \right] F^*(y_i)$$

$$\text{Seja } \epsilon(t,x) = \sum_{j=1}^L \frac{*\hat{M}_t^J(\det M_t^J)h(x)}{N_G(f_t(x))} \quad (G = \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{K})$$

$$\text{e } \eta(t,x,y) = \sum_{i=1}^p \frac{(f_t)_i h(x)}{N_G(f_t(x))} y_i \quad (G = \mathbb{C} \text{ ou } \mathbb{K})$$

Do Lema 3.5, obtemos que ϵ e η são diferenciáveis de classe C^i .

Portanto, integrando $(\epsilon(x,t), 1)$ (quando $G = \mathbb{R}$) obtemos uma $\mathbb{R}$ -equivalência entre f e g ; integrando, $(x, \eta(x,y,t), 1)$ (com $G = \mathbb{C}$), obtemos uma $\mathbb{C}$ -equivalência. De $(\epsilon(x,t), \eta(x,y,t), 1)$, podemos obter a $\mathbb{K}$ -equivalência de f e g .

Isto prova a parte (a).

Para provar a parte (b) basta observar que se $i = 0$, $f - g \in m_n^{r+1} \theta_f$, e se g é suficientemente próximo de f , g também satisfaz (c_{2r}) .

Observação 3.7:

Se $p = 1$, $G = R$, a Proposição 3.6 reduz-se ao Teorema de Takens [29], que fornece a melhor estimativa possível para as hipóteses consideradas.

Observação 3.8:

É possível melhorar o resultado anterior, fazendo hipóteses sobre o *corank* de f e usando a ordem de $\hat{M}$ para diminuir a ordem de $g-f$.

Seja $f : (R^n, 0) \rightarrow (R^p, 0)$ um germe de aplicação C^∞ de corank k . Então f tem a forma normal.

$$(*) \quad \begin{cases} u_i = x_i & i = 1, \dots, p-k \\ u_{p-k+j} = f_j(x_1, \dots, x_{p-k}, x_{p-k+1}, \dots, x_n) & j = 1, \dots, k. \end{cases}$$

Seja $s = \max\{s \mid f_j \in m_n^s, j = 1, \dots, k\}$.

Caso 1:

$G = R$. Suponhamos que $I_R(f)$ é elíptico.

Então, temos a seguinte:

Proposição 3.9:

Se f satisfaz (c_{2r}) e (d_{2r_0}) , então f é $\ell = r+i(r-r_0+1)-(s-1)(k-1)-C^i-R$ -determinada.

Observemos que $(s-1)(k-1) \geq 1$, se $k > 1$, ou seja, o resultado da Proposição 3.9 é um refinamento dos anteriores se $k > 1$.

Prova:

A prova segue como na Proposição 3.6, bastando apenas observar que

$$\epsilon(t, x) = \prod_{j=1}^L \frac{{}^* \hat{M}_t^J (\det M_t^J) h(x)}{N_G(f_t(x))} \quad \text{e} \quad {}^* \hat{M}_t^J \in m_n^{(s-1)(k-1)}$$

A Proposição e exemplo seguintes mostram que as estimativas obtidas na Proposição 3.9 são mais precisas do que as obtidas em [21], em casos significativos.

Proposição 3.10:

Seja $f : (R^n, 0) \rightarrow (R^p, 0)$ como em (*) (p. 74), de corank k . Suponhamos que cada f_j é homogênea de grau r_j , $j = 1, \dots, k$.

Se $I_R(f)$ é elíptico, f é $(r+i-1)-C^i-R$ -determinada,

onde $r = \max_{1 \leq j \leq k} r_j$.

Prova:

$$\begin{cases} u_i = x_i \\ u_{p-k+j} = f_j(x_1, \dots, x_{p-k}, x_{p-k+1}, \dots, x_n) \quad j = 1, \dots, k. \end{cases}$$

Podemos assumir, sem perda de generalidade, que

$$2 \leq r_1 \leq r_2 \leq \dots \leq r_k.$$

Então cada menor $p \times p$ de df_x é homogêneo de grau:

$$\sum_{i=1}^k (r_i - 1) = r = r_0.$$

Os elementos de $\hat{M}$ são menores $(p-1) \times (p-1)$ de df_x , que são homogêneos, com o grau dependendo da linha omitida. O menor grau de $\hat{M}$ é, portanto:

$$\sum_{i=1}^{k-1} (r_i - 1).$$

Logo a ordem de C^i - $\mathcal{R}$ -determinação de f é :

$$r+i(r-r_0+1) - \sum_{i=1}^{k-1} (r_i - 1) = \sum_{i=1}^k (r_i - 1) + i - \sum_{i=1}^{k-1} (r_i - 1) = r_k - 1 + i = r - 1 + i.$$

O resultado da Proposição anterior é exato.

Exemplo 3.11:

$$\begin{cases} u(x,y) = x^r - y^r, & r \text{ par} \\ v(x,y) = xy \end{cases}$$

Pela Proposição 3.10, f é $(r+i-1)$ - C^i - $\mathcal{R}$ -determinado.

O resultado de D. Lefebvre e M.T. Pourprix em [21] estabelece que: Se f satisfaz à hipótese:

H_r) Existe um real r , $r \geq 1$, constantes $\alpha > 0$, $c > 0$ e uma vizinhança V da origem de $\mathbb{R}^n$ tal que para todo x de $V \cap \{x \mid \|f(x)\| < \alpha \|x\|^r\}$, $df(x)$ admite uma seção $S(x)$ com $\|S(x)\| \leq c / \|x\|^{r-1}$ e se s_f é o menor inteiro s tal que $d^s f(0) \neq 0$.

Então f é k - C^i - $\mathcal{K}$ -determinada, onde $k \geq r+i(r-s_f+1)-1$.

Logo, no exemplo considerado, $df = \begin{bmatrix} rx^{r-1} & -ry^{r-1} \\ y & x \end{bmatrix}$

$$S(x) = df^{-1} = \frac{1}{r(x^r + y^r)} \begin{bmatrix} x & ry^{r-1} \\ -y & rx^{r-1} \end{bmatrix}$$

$$\therefore ||S(x)|| \leq \frac{C}{|(x,y)|^{r-1}}$$

$s_f = 2$ e obtêm-se que f é $r-1+i(r-1)-C^i-K$ -determinado.

Caso 2: $G = C$

Vamos assumir que $I_C(f)$ é elíptico.

Se f é como em (*) (p. 74), de corank k , consideremos:

$$N_C^*(f) = (f_1)^2 + \dots + (f_k)^2 + (u_1^s)^2 + \dots + (u_{p-k}^s)^2$$

Claramente, $N_C^*(f)$ satisfaz uma condição de Lojasiewicz, que indicaremos por (c_{2r}^*) .

Neste caso, $N_C^*(f) \in m_n^{2s}$, isto é, $s = r_0$.

Com estas hipóteses, temos:

Proposição 3.12:

f é $(r+i(r-s+1)-1)-C^i-C$ -determinada.

Prova:

Como antes, seja: $h(u,x) = g(u,x) - f(u,x)$,

onde $u = (u_1, \dots, u_{p-k})$ indica as primeiras $p-k$ -variáveis,
 $x = (x_{p-k+1}, x_{p-k+2}, \dots, x_n)$ e $g(u, x) = f(u, x) + th(u, x)$, com
 $h(u, x) \in m_{n\theta_f}^\ell$, $\ell = r+i(r-s+1)$.

Podemos escrever:

$$N_C^*(f)h(u, x) = \sum_{i=1}^k [(f_t)_i h(u, x)] F^*(y_i) + \sum_{j=1}^{p-k} (u_j^s) h(u, x) F^*(u_j^s)$$

Seja $\eta : (R^n \times R^p \times R, 0) \rightarrow (R^n \times R^p \times R, 0)$, campo de vetores
definido por:

$$\begin{aligned} \eta(t, u, x, y) &= \frac{\sum_{i=1}^k (f_t)_i h(u, x) y_i}{N_C^*(f_t)} + \frac{\sum_{j=1}^{p-k} (u_j^s) h(x, u) u_j^s}{N_C^*(f_t)} = \\ &= \eta_1(t, u, x, y) + \eta_2(t, u, x, y). \end{aligned}$$

Do Lema 3.5, obtemos imediatamente que η_2 é de classe C^i , enquanto que $\eta_1 \in C^{i-1}$.

Entretanto, podemos modificar η_1 para obter um campo de vetores de classe C^i , usando a função p construída no Lema 2.10.

Observação 3.13:

O uso do Lema 2.10 na Proposição acima possibilitou a obtenção de uma C^i -C-estimativa que é exata, por exemplo, no caso homogêneo. Esta modificação não aparece em [1] ou [21].

D. Lefebvre e M.T. Pourprix em [21], têm uma definição de C^i -K-equivalência que é, segundo nossa definição, uma $(C^i-R)(C^{i-1}-C)$ -equivalência.

Proposição 3.14:

Seja $f : (R^n, 0) \rightarrow (R^p, 0)$ da forma:

$$\begin{cases} u_i = u_i & i = 1, \dots, p-k. \\ v_j = f_j(x, u_i) & \text{onde } f_j \text{ são homogêneas de grau } r_j. \end{cases}$$

Se $I_C(f)$ é elíptico, então f é $(r+i-1)-C^i-C$ -determinada ($i \geq 1$), $r = \max r_j$.

Prova:

Suponhamos, sem perda de generalidade que

$$2 \leq r_1 \leq r_2 \leq \dots \leq r_k = r.$$

$$\text{Seja } R = r_1 \cdot r_2 \dots r_k \text{ e } R_m = \prod_{i \neq m} r_i$$

O controle conveniente é dado por:

$$N_C^{**}(f) = (f_1)^{2R_1} (f_2)^{2R_2} \dots (f_k)^{2R_k} (u_1)^{2R} \dots (u_{p-k})^{2R}$$

O resto da prova é exatamente como na Proposição 3.12, bastando observar que se $h(x, u) \in m_n^{r+i} C_n$, a função

$$\frac{(f_m)^{2R_m}}{N_C^{**}(f)} h(x, u) = \frac{f_m^R}{N_C^{**}(f)} f_m^{R-1} h f_m$$

$$\text{é da forma } \frac{f_m^R}{N_C^{**}(f)} g f_m, \text{ onde } g \in m_n^{\ell} C_n,$$

$$\ell = [r_m(R-1) + r + i] = R - r_m + r_k + i \geq R + i$$

Do Lema 3.5, obtemos que $\frac{f_m^{R_m}}{N_C^{**}(f)} g$ é de classe C^{i-1} .

O resto do argumento é novamente obtido através do Lema 2.10.

Caso 3: $G = K$

Novamente estamos considerando f como em *, germe de aplicação de corank > 1 .

Seja $r_o = \max\{r_o \mid d_i \in m_n^{r_o} C_n, j = i, \dots, L.\}$, onde d_i indica $\det M_i$, como anteriormente.

$$s = \max\{s \mid f_j \in m_n^s C_n, j = 1, \dots, k\}.$$

Se $I_K(f)$ é um ideal elíptico, existem constantes $\alpha > 0$, $r > 0$ tais que:

$$N^{**}(f) = (d_1^s)^2 + (d_2^s)^2 + \dots + (d_L^s)^2 + (f_1^{r_o})^2 + \dots + (f_k^{r_o})^2 + (u_1^{sr_o})^2 + \dots + (u_{p-k}^{sr_o})^2 \geq \alpha |(x, u)|^{2r}$$

$$\text{É claro que } r \geq sr_o \text{ e } r_o \geq k(s-1)$$

Nestas condições é possível obter um resultado, que envolve várias variáveis, mas apresenta uma boa estimativa.

Proposição 3.15:

$$\text{Seja } \ell_1 = \frac{r}{s} + i\left(\frac{r}{s} - r_o + 1\right) - (k-1)(s-1)$$

$$\text{e } \ell_2 = \frac{r}{r_o} + i\left(\frac{r}{r_o} - s + 1\right) - 1$$

Então f é ℓ - C^i - K -determinado onde ℓ é o menor inteiro tal que $\ell \geq \max\{\ell_1, \ell_2\}$.

Prova:

Seja $g = f+h$, com $h \in m_n^{\ell+1} \theta_f$, $\ell \geq \max\{\ell_1, \ell_2\}$ e $F(t, x) = (t, f_t(x))$, onde $f_t(x) = f(x) + th(x)$.

Consideremos:

$$\begin{aligned} & \left[\sum_{i=1}^L (d_i^2)^s h(x) \right] + \left[\sum_{j=1}^k (f_t)_j^{2r_0} h(x) \right] = \\ & = \sum_{i=1}^L (d_i^{2s-1}) \cdot t f(\hat{M}_i h(x)) + \sum_{j=1}^k (f_t)_j^{2r_0-1} F^*(y_i) h(x) \end{aligned}$$

onde, como antes: M_i é um menor $p \times p$ de $df_t(x)$, $d_i = \det M_i$ e $\hat{M}_i = \text{cof}(M_i^t)$.

(Por simplicidade, omitimos as variáveis u_j , $j = 1, \dots, n-k$).

Os campos de vetores que darão a C^i - K -equivalência entre f e g , podem ser definidos por:

$$\varepsilon(x, t) = \sum_{i=1}^L \frac{d_i^{2s-1} \hat{M}_i h(x)}{N_K^{**}(f_t)}$$

e

$$\eta(x, y, t) = \sum_{j=1}^k \frac{(f_t)_j^{2r_0-1} F^*(y_i) h(x)}{N_K^{**}(f_t)}$$

Para mostrar que ε é de classe C^i , e η de classe C^{i-1} , é suficiente observar que:

$$\left| \frac{\text{grad} N_K^{**}}{N_K^{**}} \right| \leq C \frac{1}{|x|^\lambda},$$

onde $\lambda \leq \max\{\lambda_1, \lambda_2\}$, com $\lambda_1 = \frac{r}{s} - r_0 + 1$ e $\lambda_2 = \frac{r}{r_0} - s + 1$, e proceder por indução, assim como na prova do Lema 3.5. Final-

mente, modifica-se η , com auxílio do Lema 2.10, para obter um campo de classe C^i .

Novamente, o resultado anterior é exato para germes homogêneos.

Com as modificações já usadas anteriormente, podemos obter:

Proposição 3.16:

Seja f como em (*) (p. 74), de corank k , com (f_j) , $j = 1, \dots, k$ homogêneas de grau $2 \leq r_1 \leq \dots \leq r_k = r$. Se $I_K(f)$ é elíptico, f é $(r+i-1)-C^i-K$ -determinada.

Os exemplos 2.21 e 2.22 podem ser obtidos da Proposição 3.16.

CAPÍTULO IV

PROPRIEDADE DO ESPAÇO TANGENTE À A-ÓRBITA

§ 4.1. Introdução

As propriedades estudadas neste capítulo podem ser denominadas *condições de uniformidade* (ver [9]). São condições suficientes para que propriedades do espaço tangente à A-órbita de um germe f sejam também verdadeiras para $t_g A$, para todo g com o mesmo r -jato que f .

Consideremos, por exemplo, o germe $f : (R^2, 0) \rightarrow (R^2, 0)$ definido por: $f(x, y) = (x^2 + y^3, x^3 + y^2)$. No Capítulo V (Exemplo 5.5) mostraremos que a A-órbita de f é aberta na K-órbita de f isto é:

$$(*) \quad tf(m_2\theta_2) + wf(m_2\theta_2) = t\cdot f(m_2\theta_2) + f^*(m_2)\theta_f$$

$$\text{Além disso, } tf(m_2\theta_2) + f^*(m_2)\theta_f = m_2^2\theta_f.$$

Pelo Corolário 2.4, f é 2-K-determinado.

Apesar da propriedade (*), f não é 2-determinado com respeito ao grupo A . Do ponto de vista considerado neste capítulo, isto ocorre porque a propriedade " $T_f A$ é um C_n -módulo" não é preservada por todo g com o mesmo 3-jato que f .

Terence Gaffney em [11], foi quem primeiro sugeriu que a ordem de A-determinação de um germe f tem alguma relação com a K-estrutura. Du Plessis, em [8], obteve estimativas para o grau de A-determinação, fazendo hipóteses sobre C_n -módulos contidos no A-espaço tangente.

Os resultados deste capítulo são inspirados no traba-

lho de Du Plessis e surgiram da tentativa de obter para o grupo A , um resultado análogo ao da Proposição 2.5.

No § 4.4 é feita uma aplicação dos resultados obtidos a um problema de C^0 - A -trivialidade.

§ 4.2. Condições de uniformidade

Consideremos os grupos $A_{[k]}$ e $K_{[k]}$ definidos no Capítulo I (Definições 1.32 e 1.33).

Se f é finitamente determinado, a igualdade entre os espaços tangentes:

$$tf(m_{n\theta_n}^k) + wf(m_{p\theta_p}^k) = tf(m_{n\theta_n}^k) + f^*(m_p^k)_{\theta_f}$$

significa que a $A_{[k]}$ -órbita de f é aberta em $K_{[k]}$. Ou seja, qualquer caminho $K_{[k]}$ -trivial $F(t,x) = (t, \tilde{f}(t,x))$ com $\tilde{f}(0,x) = f(x)$, é também $A_{[k]}$ -trivial, para t suficientemente pequeno.

As proposições 4.1 e 4.2 abaixo dão condições suficientes para que a propriedade: " $A_{[k]}(f)$ é aberta em $K_{[k]}(f)$ ", seja preservada por deformações.

Proposição 4.1:

Seja $f : (R^n, 0) \rightarrow (R^p, 0)$ A -finitamente determinado e tal que:

$$tf(m_{n\theta_n}^k) + wf(m_{p\theta_p}^k) = tf(m_{n\theta_n}^k) + f^*(m_p^k)_{\theta_f} \quad (*)$$

Seja $F(t,x) = (t, \tilde{f}(t,x))$, $\tilde{f}(0,x) = f(x)$.

Se $\dim_R \frac{m_n^\theta f_t}{tf_t(m_n^k) + f_t^*(m_p^k)\theta_{f_t}}$ é constante, então

f_t satisfaz (*) para todo t suficientemente pequeno.

Prova:

$$\begin{aligned} \dim_R \frac{m_n^\theta f}{tf(m_n^k) + wf(m_p^k)} &= \dim_R \frac{m_n^\theta f}{tf(m_n^k) + f^*(m_p^k)\theta_f} \\ &= \dim_R \frac{m_n^\theta f_t}{tf_t(m_n^k) + f_t^*(m_p^k)\theta_{f_t}} \leq \dim_R \frac{m_n^\theta f_t}{tf_t(m_n^k) + wf_t(m_p^k)} \end{aligned}$$

Por outro lado, para toda deformação de f , vale:

$$\dim_R \frac{m_n^\theta f}{tf(m_n^k) + wf(m_p^k)} \geq \dim_R \frac{m_n^\theta f_t}{tf_t(m_n^k) + wf_t(m_p^k)}$$

$\therefore$ as igualdades se verificam.

Proposição 4.2:

Seja $f: (R^n, 0) \rightarrow (R^p, 0)$ tal que:

(i) $tf(m_n^{k-1}) + wf(m_p^{k-1})$ é um C_n -módulo.

e

(ii) $tf(m_n^k) + wf(m_p^k) \supseteq m_n^r \theta_f$

Então qualquer deformação g de f com $g-f \in m_n^{r-k+2} \theta_f$ tem as propriedades (i) e (ii).

Nesta proposição procuramos obter um resultado análogo ao da Proposição 2.5.

Quando $k = 1$, temos o seguinte corolário:

Corolário 4.3:

Se f é infinitesimalmente estável isto é: $\theta_f = \text{tf}(\theta_n) + \text{wf}(\theta_p)$ e $\text{tf}(m_n \theta_n) + \text{wf}(m_p \theta_p) \supseteq m_n^r \theta_f$, então f é r -A-determinado.

O resultado contido no Corolário 4.3, também pode ser obtido da:

Proposição 3.8 (Du Plessis [8])

Seja $f : (R^n, 0) \rightarrow (R^p, 0)$

Se:

$D \subset \text{tf}(\theta_n) + \text{wf}(\theta_p) + m_n^s \theta_f$ é um C_n -módulo tal que:

$$m_n^s \theta_f \subset \text{tf}(m_n \theta_n) + f^*(m_p)D + m_n^{s+1} \theta_f$$

Então f é s -A-determinado.

As hipóteses da Proposição 4.2 são mais restritivas do que as da Proposição 3.8 de Du Plessis.

Quando $k = 2$, a hipótese (i) diz que a A -órbita de f é aberta na K -órbita de f .

Com a hipótese (ii):

$$\text{tf}(m_n^2 \theta_n) + f^*(m_p^2) \theta_f \supseteq m_n^r \theta_f,$$

obtemos que f é $r-1$ -A-determinado.

Prova da Proposição 4.2:

Seja g tal que $j^{r-k+1}g(0) = j^{r-k+1}f(0)$

Então

$$(iii) \quad tg(m_n^{k-1} \theta_n) + wg(m_p^{k-1} \theta_p) + m_n^r \theta_g =$$

$$tf(m_n^{k-1} \theta_n) + wf(m_p^{k-1} \theta_p)$$

Da hipótese (i), segue-se que o lado esquerdo da igualdade (iii) é um C_n -módulo.

Logo,

$$(iv) \quad tg(g^*(m_p)m_n^{k-1} \theta_n) + wg(m_p^k \theta_p) + g^*(m_p)m_n^r \theta_g$$

é também um C_n -módulo.

Por outro lado, da hipótese (ii) aplicada a g , obtemos:

$$(v) \quad tg(m_n^k \theta_n) + wg(m_p^k \theta_p) + m_n^{r+1} \theta_g = tf(m_n^k \theta_n) + wf(m_p^k \theta_p) \supseteq m_n^r \theta_f$$

A igualdade (v) não se altera se adicionarmos $g^*(m_p)m_n^r$ a ambos os membros.

Logo:

$$tg(m_n^k \theta_n) + wg(m_p^k \theta_p) + g^*(m_p)m_n^r + m_n^{r+1} \theta_g \supseteq m_n^r \theta_g$$

Podemos aplicar o Lema de Nakayama ao C_n -módulo finitamente gerado:

$$tg(m_n^k \theta_n) + wg(m_p^k \theta_p) + g^*(m_p)m_n^r \theta_g + m_n^{r+1} \theta_g$$

e a seu C_n -submódulo

$$tg(m_{n\ n}^k) + wg(m_{p\ p}^k) + g^*(m_p)m_{n\ g}^r,$$

para obter:

$$tg(m_{n\ n}^k) + wg(m_{p\ p}^k) + g^*(m_p)m_{n\ g}^r \supseteq m_{n\ g}^r$$

Seja:

$$E = \frac{tg(m_{n\ n}^k) + wg(m_{p\ p}^k) + m_{n\ g}^r}{tg(m_{n\ n}^k) + wg(m_{p\ p}^k) + m_n^{2r-k+1} \theta_g}$$

Então:

$$\dim_R \frac{E}{g^*(m_p)E} = 0.$$

Logo, pelo Teorema de Malgrange E é um $g^*(C_p)$ -módulo finitamente gerado.

Do Lema de Nakayama, obtemos então:

$$tg(m_{n\ n}^k) + wg(m_{p\ p}^k) + m_n^{2r-k+1} \theta_g \supseteq m_{n\ g}^r$$

O resultado segue do Corolário 1.23, isto é:

$$tg(m_{n\ n}^k) + wg(m_{p\ p}^k) \supseteq m_{n\ g}^r$$

Para mostrar que (i) também se verifica para g , basta observar que:

$$tg(m_{n\ n}^{k-1}) + wg(m_{p\ p}^{k-1}) + m_{n\ g}^r = tf(m_{n\ n}^{k-1}) + wf(m_{p\ p}^{k-1})$$

$$\text{e } tg(m_{n\ n}^{k-1}) + wg(m_{p\ p}^{k-1}) \supseteq m_{n\ g}^r,$$

ou seja, é também um C_n -módulo.

4.3. O Caso $p = 1$

Quando $p = 1$, a caracterização da propriedade " $A_{[k]}(f)$ aberta em $K_{[k]}(f)$ " é simples:

Proposição 4.3:

Se $f \in m_n^2$ e

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right\rangle_{m_n}^k + (f^k) = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right\rangle_{m_n}^k + R\{f^k, f^{2k}, \dots, f^{sk}, \dots\}$$

Existem duas possibilidades:

$$(1) \quad f^k \in \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right\rangle_{m_n}^k,$$

isto é, $R_{[k]}(f)$ é aberta em $A_{[k]}(f)$.

$$(2) \quad f^k m_n \subset \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right\rangle_{m_n}^k$$

(em particular $R_{[k+1]}$ é aberta em $A_{[k+1]}$).

A recíproca é evidentemente verdadeira.

Prova:

Por hipótese $x_i f^k(x) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j} \epsilon_j + \sum_{m \geq 1} \alpha_m^i f^{km}(x)$
para $i = 1, 2, \dots, n$.

Logo,

- (1) Ou $\exists i$ para o qual a expressão acima se verifica com $\alpha_1^i \neq 0$.

Neste caso:

$$f^k(x) (-1 + x_i - \sum_{m \geq 1} \alpha_m^i f^{k(m-1)}(x)) \in \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right\rangle_{m_n^k}$$

$$\text{ou seja } f^k(x) \in \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right\rangle_{m_n^k}$$

$$(2) \text{ Ou, } \forall i, \quad x_i f^k(x) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j} \varepsilon_j + \sum_{m \geq 2} \alpha_m^i f^{km}(x)$$

$$\text{Como } f \in m_n^2, \quad (x_i - \sum_{m \geq 2} \alpha_m^i f^{k(m-1)}(x)) \quad i = 1, \dots, n,$$

constitui um sistema de geradores de m_n .

$$\text{Logo, } f^k m_n \subseteq \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right\rangle_{m_n^k}$$

Exemplo 4.4:

$$\text{Dado } f(x_1, \dots, x_n) = \lambda (x_1 x_2 \dots x_n)^2 + x_1^m + x_2^m + \dots + x_n^m, \quad m \geq 2n + 1$$

$$\text{Seja } I_f = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right\rangle$$

K. Krammer em [16], provou que $f^n \in I_f$ e $f^{n-1} \notin I_f$, para todo $\lambda \neq 0$.

É claro que se $\lambda = 0$,

$$R(x_1^m + \dots + x_n^m) \text{ é aberta em } K(x_1^m + \dots + x_n^m).$$

Logo, a propriedade " $A_{[k]}(f)$ aberta em $K_{[k]}(f)$ " não é preservada por pequenas deformações.

§ 4.4. Um Resultado de C^0 -A-trivialidade

O Lema 4.5 abaixo é também um resultado de uniformidade e generaliza o Lema 3.5 de Du Plessis:

Lema 4.5:

Seja $f : (R^n, 0) \rightarrow (R^p, 0)$ tal que

$$(*) \quad tf(m_{n\theta}^k) + wf(m_{p\theta}^k) \geq m_{n\theta}^r$$

Existe uma vizinhança U de $j^{2r-k+1}f(0)$ no conjunto dos $2r-k+1$ -jatos com o mesmo $r-k$ -jato que f , tal que todo germe g com $j^{2r-k+1}g(0) \in U$, também satisfaz $(*)$.

Além disso, para qualquer caminho:

$F(t, x) = (t, \tilde{f}(t, x))$ tal que $\tilde{f}(0, x) = f(x)$ e $\tilde{f}_t - \tilde{f}_0 \in m_1 m_n^{r-k+1} \psi_F$, temos:

$$tF(m_{n\psi}^k) + wF(m_{p\psi}^k) \geq m_{n\psi}^r \quad \text{para } |t| < \varepsilon.$$

Corolário 4.6:

Se $tf(m_{n\theta}^k) + wf(m_{p\theta}^k) \geq m_{n\theta}^r$, "deformações pequenas" de f , de ordem $\geq r$ são A-equivalentes a f .

Prova do Lema 4.5:

Seja g tal que $j^{r-k}g(0) = j^{r-k}f(0)$

Então

$$(**) \quad tg(m_{n\theta}^k) + wg(m_{p\theta}^k) + m_{n\theta}^r = tf(m_{n\theta}^k) + wf(m_{p\theta}^k)$$

Agora, se $L = \dim_R \frac{m_n^{r\theta_f}}{m_n^{2r-k+1\theta_f}}$, podemos definir:

$B_g : R^L \rightarrow \frac{m_n^{r\theta_g}}{m_n^{2r-k+1\theta_g}}$ da seguinte forma:

$$B_g(a_1, \dots, a_L) = \sum_i a_i [tg(\epsilon_i) + wg(\eta_i)], \text{ onde}$$

$\epsilon_i \in m_n^{k\theta_n}$ e $\eta_i \in m_p^{k\theta_p}$ são tais que

$\{tg(\epsilon_i) + wf(\eta_i)\}$ formam uma base para $\frac{m_n^{r\theta_f}}{m_n^{2r-k+1\theta_f}}$

A expressão (**) garante que o homomorfismo B_g está bem definido.

Além disso, como B_f é um isomorfismo, existe uma vizinhança U de $j^{2r-k+1}_f(0)$ no conjunto dos $2r-k+1$ -jatos com o mesmo $r-k$ -jato que f tal que B_g - também é isomorfismo, para todo germe g tal que $j^{2r-k+1}_g(0) \in U$.

Portanto,

$$tg(m_n^{k\theta_n}) + wg(m_p^{k\theta_p}) + m_n^{2r-k+1\theta_g} \supseteq m_n^{r\theta_g}$$

Do Corolário 1.23, segue-se que:

$$tg(m_n^{k\theta_n}) + wg(m_p^{k\theta_p}) \supseteq m_n^{r\theta_g}$$

Observemos que ficou provado que:

$$tg(m_n^{k\theta_n}) + wg(m_p^{k\theta_p}) = tf(m_n^{k\theta_n}) + wf(m_p^{k\theta_p})$$

para g suficientemente próximo de f , desde que $j^{r-k}_g = j^{r-k}_f$.

Para a demonstração da segunda parte do lema, consideremos

$F(t, x) = (t, \tilde{f}(t, x))$ tal que $\tilde{f}_t$ tem o mesmo r-k-ja to que $\tilde{f}_0 = f$.

Observemos que:

$$m_{nF}^r = m_{nf}^r + tm_{nF}^r \subseteq tf(m_{nn}^k) + wf(m_{pp}^k) + tm_{nF}^r$$

..

$$m_{nF}^r \subseteq tF(m_{nn+1}^k) + wF(m_{pp+1}^k) + tm_{nF}^r \quad (i)$$

$$\text{Agora, seja } E = \frac{tF(m_{nn+1}^k) + wF(m_{pp+1}^k) + m_{nF}^r}{tF(m_{nn+1}^k) + wF(m_{pp+1}^k)}$$

E é um $F^*(C_{p+1})$ -módulo e

$$(t) E = \frac{tF(m_{nn+1}^k) + wF(m_{pp+1}^k) + (t)[tF(m_{nn+1}^k) + wF(m_{pp+1}^k) + m_{nF}^r]}{tF(m_{nn+1}^k) + wF(m_{pp+1}^k)} = E$$

Se E for finitamente gerado como $F^*(C_{p+1})$ -módulo, poderemos aplicar o Lema de Nakayama para obter $E = 0$, ou seja:

$$m_{nF}^r \subseteq tF(m_{nn+1}^k) + wF(m_{pp+1}^k)$$

O objetivo agora é demonstrar que E é finitamente gerado como $F^*(C_{p+1})$ -módulo:

$$\text{Seja } E' = \frac{tF(m_{nn+1}^k) + m_{nF}^r}{tF(m_{nn+1}^k)}$$

E' é um C_{n+1} -módulo finitamente gerado.

O Teorema de Preparação de Malgrange diz que E' é finitamente gerado como $F^*(C_{p+1})$ -módulo $\iff \dim_R \frac{E'}{F^*(m_{p+1})E'} < \infty$.

De fato, temos:

$$\begin{aligned} \frac{E'}{F^*(m_{p+1})E'} &\cong \frac{\frac{tF(m_{n,n+1}^k) + m_{n,F}^r}{tF(m_{n,n+1}^k)}}{tF(m_{n,n+1}^k) + F^*(m_{p+1})[tF(m_{n,n+1}^k) + m_{n,F}^r]} \\ &\cong \frac{tF(m_{n,n+1}^k) + m_{n,F}^r}{tF(m_{n,n+1}^k) + F^*(m_{p+1})[tF(m_{n,n+1}^k) + m_{n,F}^r]} \end{aligned}$$

Seja $S = m_{n,F}^r$ $T = tF(m_{n,n+1}^k) + F^*(m_{p+1})m_{n,F}^r$,

de forma que o quociente anterior é $= \frac{T+S}{T}$.

$$\text{Portanto } \frac{T+S}{T} \cong \frac{S}{T \cap S} = \frac{m_{n,F}^r}{[tF(m_{n,n+1}^k) + F^*(m_{p+1})m_{n,F}^r] \cap m_{n,F}^r}$$

De (i), segue-se que:

$$tF(m_{n,n+1}^k) + F^*(m_{p+1})m_{n,F}^r \supseteq m_{n,F}^r$$

Logo,

$$tF(m_{n,n+1}^{r+k}) + F^*(m_{p+1})m_{n,F}^r \supseteq m_{n,F}^{2r}$$

Por outro lado,

$$tF(m_{n,n+1}^{r+k}) + F^*(m_{p+1})m_{n,F}^r \supseteq tm_{n,F}^r$$

Portanto, o denominador de $\frac{S}{T \cap S}$ contém $m_{n+1}^r m_{n,F}^r$.

$$\text{Logo } \dim_R \frac{S}{T \cap S} \leq \dim_R \frac{m_n^r \psi_F}{m_{n+1}^r m_n^r \psi_F} < \infty$$

∴ E' é finitamente gerado como $F^*(C_{p+1})$ -módulo.

É claro que E também é um $F^*(C_{p+1})$ -módulo finitamente gerado e o resultado segue.

O seguinte corolário da prova do Lema 4.5 é mais aplicável:

Corolário 4.7:

Seja $f : (R^n, 0) \rightarrow (R^p, 0)$ tal que

$$(*) \quad \text{tf}(m_n^k \theta_n) + \text{wf}(m_p^{k'} \theta_p) \supseteq m_n^r \theta_f \quad k' \leq k$$

Suponha que $\text{wg}(\xi) - \text{wf}(\xi) \in m_n^r \theta_f$

para todo g tal que $j^{r-k}g(0) = j^{r-k}f(0)$, $\forall \xi \in m_p^{k'} \theta_p$.

Então existe uma vizinhança U de $j^{2r-k+1}f(0)$ no conjunto dos $2r-k+1$ -jatos com o mesmo $r-k$ -jato que f , tal que todo germe g com $j^{2r-k+1}g(0) \in U$, também satisfaz $(*)$.

Vale também o resultado análogo para caminho.

Definição 4.8:

O grupo $C^{\ell}-A$ consiste de pares (h, k) de germes de difeomorfismos de classe C^{ℓ} ($\ell \geq 1$), $h : (R^n, 0) \rightarrow (R^n, 0)$ e $k : (R^p, 0) \rightarrow (R^p, 0)$ ou homeomorfismos quando $\ell = 0$.

Um projeto que surge naturalmente é a procura de resultados análogos aos obtidos no Capítulo II, para o grupo $C^{\ell}-A$.

No caso $\ell = 0$, é possível enunciar um resultado que se aplica a alguns exemplos não contidos nos resultados de Damon ([5],[6]), e que não utiliza explicitamente a hipótese de quase-homogeneidade dos germes envolvidos:

Lema 4.9: Seja $f : (R^n, 0) \rightarrow (R^p, 0)$, $p \geq 2$ um germe que satisfaz às hipóteses H_1^0 , H_2^0 e H_3^0 abaixo:

$$(H_1^0) \quad \begin{cases} \text{tg}(m_n^k \theta_n) + \text{wg}(m_p^{k'} \theta_p) \supseteq m_n^r \theta_f, & k' \leq k \\ \text{wg}(\xi) - \text{wf}(\xi) \in m_n^r \theta_g & \text{para todo } g \text{ tal que} \end{cases}$$

$$j^{r-k} g(0) = j^{r-k} f(0), \quad \forall \xi \in m_p^{k'} \theta_p$$

$$(H_2^0) \quad f^*(m_p^\ell \theta_f) \subseteq m_n^{k-1} \theta_f \quad \text{para algum } 1 \leq \ell \leq k'-1 \quad \text{e tal que} \\ \ell(r-k+1) \geq k-1$$

$$(H_3^0) \quad \text{Seja } \rho(f(x)) = |f(x)|^\ell. \text{ Então existem constantes } \alpha > 0, \\ \beta > 0 \text{ e uma vizinhança } V \text{ da origem do } R^n, \text{ de modo que:}$$

$$N_R(f) = \sum_{i=1}^L (\det M_i)^2 \geq \beta |x|^{2m}, \quad \text{para todo } x \in V \cap \{x | \rho(f) < \alpha |x|^{k-1}\},$$

$$\text{com } m = [p(\frac{k-1}{\ell} - 1)], \text{ maior inteiro menor ou igual a } p(\frac{k-1}{\ell} - 1)$$

Então:

(i) deformações pequenas de f de ordem $\geq r-k+1$ são C^0 -A-triviais.

(ii) Se para algum $s \geq r-k+1$, as hipóteses (H_1^0) , (H_2^0) e (H_3^0) se verificam para todo g com o mesmo s -jato que f , então f é s - C^0 -A-determinado.

Prova:

Em (H_1^0) temos as hipóteses do Corolário 4.7.

Portanto a condição: $\text{tg}(m_n^k \theta_n) + \text{wg}(m_p^{k'} \theta_p) \supseteq m_n^r \theta_g$ se verifica para todo g suficientemente próximo de f e tal que $j^{r-k} g(0) = j^{r-k} f(0)$.

De (H_2^0) : $f^*(m_p^\ell \theta_f) \subseteq m_n^{k-1} \theta_f$, $\ell(r-k+1) \geq k-1$, obtemos:

$$tf(m_{n\theta}^{k'}) + wf(m_p^{k'}\theta_p) \geq m_n^{r-k+1} f^*(m_p^\ell)\theta_f$$

Com estas condições, segue-se que para todo caminho:

$$F(x,t) = (\tilde{f}(x,t), t); \text{ onde } \tilde{f}(x,t) = f(x) + th(x),$$

com $h(x) \in m_n^{r-k+1}\theta_f$ e t suficientemente pequeno tem-se:

$$(*) \quad h(x)\rho(\tilde{f}) = tF(\xi(x,t)) + \eta(F(x,t)), \quad \xi \in m_n^{k'}\psi_{n+1}$$

$$\eta \in m_p^{k'}\psi_{p+1}$$

A equação (*) possibilita a construção dos campos de vetores. Observemos que o campo w em $(R^p \times R, 0 \times 0)$ definido por:

$$\begin{cases} w(y,t) = \eta(y,t)/\rho(y) \\ w(0,t) = 0 \end{cases} \text{ satisfaz a } |w(y,t)| \leq c|y|$$

Logo, é integrável.

É preciso, no entanto, garantir a integrabilidade do campo $v(x,t)$ de $(R^n \times R, 0 \times 0)$.

A hipótese (H_3^0) tem esta finalidade.

Do Lema 3.4 temos:

$$\det M_i = tF(\tilde{\gamma}(x,t)), \quad \text{com } \hat{\gamma} \in m_n^{r_0}\psi_{n+1},$$

$$\text{com } r_0 = [(p-1)(\frac{k-1}{\ell} - 1)].$$

Portanto,

$$h(x)N_R(\tilde{f}(x,t)) = tF(\gamma(x,t)), \quad \text{com } \gamma \in m_n^{m+r_0+(r-k+1)}\psi_{n+1}$$

As hipóteses sobre k, ℓ , garantem que (H_3^0) se verifica também para $\tilde{f}(x,t)$, com t suficientemente pequeno. Ou seja: existem constantes positivas que ainda denotaremos por α e β , tais que:

$$\text{Se } \rho(\tilde{f}(x,t)) < \alpha |x|^{k-1}, \quad \text{então:}$$

$$N_R(\tilde{f}(x,t)) \geq \beta |x|^{2m} \quad \text{para } t \in (-\varepsilon, \varepsilon).$$

O argumento final utiliza uma conveniente partição da unidade para a obtenção de um campo integrável em $(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, 0 \times 0)$, a partir das equações (*) e (**):

Seja $M = (V \times I) - (0 \times I)$ onde $I = (-\varepsilon, \varepsilon)$.

Consideremos:

$$F_1 = (\{(x, t) \mid \tilde{f}(x, t) = 0\} - (0 \times \mathbb{R})) \cap M$$

e

$$F_2 = \{(x, t) \mid \rho(\tilde{f}(x, t)) \geq \alpha |x|^{k-1}\} \cap M$$

F_1 e F_2 são fechados disjuntos de M .

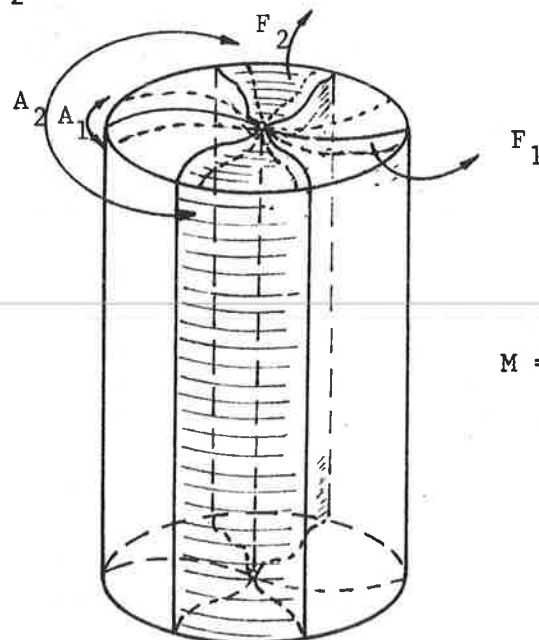
Sejam,

$$A_1 = \{(x, t) \mid \rho(\tilde{f}(x, t)) < \alpha_1 |x|^{k-1}\} \cap M$$

e

$$A_2 = \{(x, t) \mid \rho(\tilde{f}(x, t)) < \alpha_2 |x|^{k-1}\} \cap M$$

com $\alpha_1 < \alpha < \alpha_2$.



$$M = (V \times I) - (0 \times I)$$

Fig. 4.1

Consideremos $\rho(x) = \rho_1(x) + \rho_2(x)$ uma partição da unidade subordinada à cobertura $\{A_2, (\bar{A}_1)^c\}$.

Ou seja:

$$\begin{cases} \rho_1(x,t) = 1 & \text{se } (x,t) \in F_1 \\ \rho_1(x,t) = 0 & \text{se } (x,t) \in A_2^c \end{cases}$$

$$\begin{cases} \rho_2(x,t) = 1 & \text{se } (x,t) \in F_2 \\ \rho_2(x,t) = 0 & \text{se } (x,t) \in \bar{A}_1 \end{cases}$$

Da equação (*), seja:

$$\begin{cases} v_2(x,t) = \frac{\xi(x,t)}{\rho(\tilde{f}(x,t))} & \text{se } (x,t) \in F_1^c \\ v_2(x,t) = 0 & \text{se } (x,t) \in F_1 \end{cases}$$

De (**), definimos:

$$\begin{cases} v_1(x,t) = \frac{\gamma(x,t)}{N_R(f)} & \text{se } (x,t) \in F_2^c \\ v_1(x,t) = 0 & \text{em } F_2 \end{cases}$$

Todas as funções definidas podem ser extendidas de modo a se anularem em $0 \times I$.

Então, seja v campo em $(R^n \times R, 0 \times 0)$, definido por:

$$\begin{cases} v(x,t) = \rho_1(x,t)v_1(x,t) + \rho_2(x,t)v_2(x,t) \\ v(0,t) = 0. \end{cases}$$

É fácil ver que $v(x,t)$ é contínuo e $|v(x,t)| \leq c|x|$.

Como no Teorema 2.11, podemos utilizar o resultado de Kuo [18], sobre campos que satisfazem a uma condição de Lipschitz ao longo de uma solução, para mostrar que $v(x,t)$ é integrável.

Além disso, tem-se obviamente:

$$h(x) = tF(v(x,t)) + w(F(x,t))$$

Com as integrais de v e w , construímos os germes de homeomorfismos:

$$H : (R^n \times R, 0 \times 0) \rightarrow (R^n \times R, 0 \times 0)$$

$$H(x,t) = (h(x,t), t), \quad h(x,0) = x$$

$$K : (R^p \times R, 0 \times 0) \rightarrow (R^p \times R, 0 \times 0)$$

$$K(y,t) = (k(y,t), t), \quad k(y,0) = y,$$

tais que: $K \circ F \circ H^{-1} = (f, id_R)$, o que conclui a demonstração.

Com uma modificação nas hipóteses (H_2^0) e (H_3^0) , acreditamos ser possível obter resultados melhores.

É necessário, por exemplo, permitir germes f tais que $\text{rank } df(0) \neq 0$.

Este é um projeto que esperamos desenvolver em breve.

A situação limite $r-k+1 = k-1$ é interessante.

É fácil ver que, neste caso, k' deve ser igual a dois.

Ou seja, temos a seguinte proposição, que se aplica, por exemplo, a germes A -finitamente determinados "genéricos" e K -equivalentes a um germe homogêneo:

Proposição 4.10:

Seja $f : (R^n, 0) \rightarrow (R^p, 0)$ tal que:

$$m_n^{2(k-1)} \theta_f \subseteq \text{tf}(m_{n,n}^k) + \text{wf}(m_{p,p}^2) = \text{tf}(m_{n,n}^k) + f^*(m_p) m_n^{k-1} \theta_f$$

(i) Então deformações pequenas de ordem $\geq k-1$ são C^0 - A -triviais.

Além disso, se $\text{tf}(m_{n,n}^{k-1} \theta_n) + \text{wf}(m_{p,p} \theta_p)$ é um C_n -módulo, então:

(ii) f é $(k-1)$ - C^0 - A -determinado.

Prova:

De,

$$\text{tf}(m_{n,n}^k) + f^*(m_p) m_n^{k-1} \theta_f \supseteq m_n^{2(k-1)} \theta_f$$

segue-se que f é $(k-1)$ - C^0 - K -determinado.

Esta condição é suficiente para garantir que a condição (H_3^0) se verifica para todo g com o mesmo $(k-1)$ -jato que f .

De fato, de acordo com os resultados do Capítulo II, temos:

$$|x|^{2(k-1)} = \text{tg}(\varepsilon(x)) + \sum_{i=1}^p g_i(x) \eta_i(x)$$

com $\varepsilon \in m_{n,n}^k$ e $\eta_i \in m_n^{k-1} \theta_g$

Então:

$$|x|^{k-1} = \text{tg}(v(x)) + \sum g_i(x) w(x)$$

com $|v(x)| \leq c_1 |x|$, $|w(x)| \leq c_2$.

Ou seja:

$|x|^{k-1} \leq c_1 |tg| |x| + c_2 \sum_{i=1}^p |g_i|$, o que prova a afirmação.

A segunda parte da proposição segue de uma fácil modificação da Proposição 4.2.

Exemplo 4.11:

$$f : (\mathbb{R}^3, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$$

$$(x, y, z) \mapsto (x^2 + y^2 + x^3 + z^3, x^2 + z^2 + y^3)$$

É fácil ver que:

$$tf(m_{n,n}^2) + f^*(m_p)m_{n,f}^{\theta} = m_{n,f}^3$$

e f é 2-K-determinado.

Por outro lado, é possível mostrar que:

$$tf(m_{n,n}^3) + wf(m_{p,p}^2) = m_{n,f}^4 \supsetneq f^*(m_p)m_{n,f}^2$$

(Du Plessis [8], exemplo 3.22, mostra que f é 3-A-determinado).

Da Proposição 4.10, segue-se que deformações pequenas de ordem dois ou três são C^0 -A-triviais.

Observemos que:

$$tf(m_{n,n}^{\theta}) + wf(m_{p,p}^{\theta}) \not\subseteq m_{n,f}^3$$

e, portanto, $\exists$ deformação pequena de ordem três que não é A-trivial.

Além disso, os resultados de Damon ([5],[6])) não se aplicam porque f não é A -quase homogêneo, ou seja a parte homogênea de f não é A -finitamente determinado.

CAPÍTULO V

SOBRE A EXISTÊNCIA DE A-ÓRBITAS ABERTAS EM UMA DADA K-ÓRBITA

§ 5.1. Condições Suficientes e Grau de Determinação

O problema de classificação de germes finitamente determinados pode ser colocado sob a seguinte forma: determinar as classes de A-equivalência dos germes A-finitamente determinados em uma K-órbita dada.

Este é, evidentemente, um problema difícil, mesmo em dimensões baixas e nos casos mais simples. Du Plessis em [8] obtém resultados completos apenas quando $n = p = 2$ e $K(f) = K(x, y^3)$ e $K(f) = K(x, y^4)$ e as provas destes resultados são elaboradas.

Neste Capítulo, propomos um método alternativo, isto é, procurar em cada K-órbita os germes mais simples. Se uma dada K-órbita não possui germes infinitesimalmente estáveis, os germes mais simples a serem procurados são aqueles cuja A-órbita é aberta na K-órbita.

Os dois resultados: Teorema 5.1 e Proposição 5.2 fornecem condições suficientes para que a A-órbita de um germe $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ seja aberta na K-órbita de f . A proposição 5.3 fornece uma estimativa para o grau de A-determinação de f .

Teorema 5.1:

Suponha que f é K-finitamente determinado e

$$\frac{\theta_f}{\text{tf}(\theta_n) + f^*(m_p)\theta_f + \text{wf}(\theta_p)} \quad \text{tem } \{v_1, \dots, v_r\} \text{ como}$$

$$\text{base e } f_i v_j \in \text{tf}(m_n \theta_n) + \text{wf}(m_p \theta_p), \quad i = 1, \dots, p \\ j = 1, \dots, r.$$

Então $T_f A = T_f K$, isto é: a A -órbita de f é a berta na K -órbita de f .

Prova:

$$\text{Como } \dim_R \frac{\theta_f}{\text{tf}(\theta_n) + \text{wf}(\theta_p) + f^*(m_p)\theta_f} = r \quad \text{então}$$

$$\frac{\theta_f}{\text{tf}(\theta_n) + \text{wf}(\theta_p)} \quad \text{é finitamente gerado, como um } f^*(C_p)\text{-módulo}$$

com geradores $\{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ (Teorema de Malgrange). Logo

$$\theta_f = \text{tf}(\theta_n) + \text{wf}(\theta_p) + f^*(C_p) \{v_1, \dots, v_r\} \quad (i)$$

$$\text{É claro que } f^*(m_p)v_j \subset \text{tf}(m_n \theta_n) + \text{wf}(m_p \theta_p) \quad (ii)$$

De (i) e (ii) obtemos:

$$\theta_f = \text{tf}(\theta_n) + \text{wf}(\theta_p) + R\{v_1, \dots, v_r\} \quad (iii)$$

Multiplicando (iii) por $f^*(m_p)$, obtemos:

$$f^*(m_p)\theta_f \subset \text{tf}(m_n \theta_n) + \text{wf}(m_p \theta_p) + f^*(m_p) \{v_1, \dots, v_r\}$$

De (ii) segue-se que:

$$f^*(m_p)\theta_f \subset \text{tf}(m_n \theta_n) + \text{wf}(m_p \theta_p).$$

Proposição 5.2:

Suponhamos que:

$$(a) \quad f^*(m_p)_{\theta_f} \subseteq \text{tf}(m_n)_{\theta_n} + \text{wf}(m_p)_{\theta_p} + m_n^s \theta_f$$

e

$$(b) \quad m_n^s \theta_f \subseteq \text{tf}(m_n)_{\theta_n} + f^*(m_p^2)_{\theta_f} + m_n^{s+1} \theta_f$$

Então a A -órbita de f é aberta na K -órbita de f .

Prova:

$$\begin{aligned} f^*(m_p)_{\theta_f} &\subseteq \text{tf}(m_n)_{\theta_n} + \text{wf}(m_p)_{\theta_p} + m_n^s \theta_f \subseteq \text{tf}(m_n)_{\theta_n} + \text{wf}(m_p)_{\theta_p} + \\ &+ f^*(m_p^2)_{\theta_f} + m_n^{s+1} \theta_f \subseteq \text{tf}(m_n)_{\theta_n} + f^*(m_p)_{\theta_f} \end{aligned}$$

Portanto:

$$\text{tf}(m_n)_{\theta_n} + \text{wf}(m_p)_{\theta_p} + f^*(m_p^2)_{\theta_f} + m_n^{s+1} \theta_f = \text{tf}(m_n)_{\theta_n} + f^*(m_p)_{\theta_f}$$

Em particular, o lado esquerdo da expressão acima é também um C_n -módulo.

Portanto, podemos aplicar o lema de Nakayama para obter:

$$\text{tf}(m_n)_{\theta_n} + \text{wf}(m_p)_{\theta_p} + f^*(m_p^2)_{\theta_f} = \text{tf}(m_n)_{\theta_n} + f^*(m_p)_{\theta_f}.$$

Agora seja

$$A = \frac{\text{tf}(m_n)_{\theta_n} + \text{wf}(m_p)_{\theta_p} + f^*(m_p^2)_{\theta_f}}{\text{tf}(m_n)_{\theta_n}} = \frac{\text{tf}(m_n)_{\theta_n} + f^*(m_p)_{\theta_f}}{\text{tf}(m_n)_{\theta_n}}$$

A é um C_n -módulo finitamente gerado e $\dim_R \frac{A}{f^*(m_p)A} < \infty$

(pois f é finitamente K -determinado).

Pelo Teorema de Malgrange, segue-se que A é um $f^*(C_p)$ -módulo finitamente gerado.

Seja $B = \frac{tf(m_n^{\theta_n}) + wf(m_p^{\theta_p})}{tf(m_n^{\theta_n})}$, B é um $f^*(C_p)$ -sub-

módulo de A . Tem-se $B + f^*(m_p)A = A$ e do Lema de Nakayama segue-se que $B = A$.

Com uma pequena modificação da hipótese (b), exigindo que $m_n^s \theta_f$ esteja contido num "espaço tangente" um pouco menor é possível reduzir o grau de determinação de f para $s-1$:

Proposição 5.3:

Se $f^*(m_p) \theta_f \subseteq tf(m_n^{\theta_n}) + wf(m_p^{\theta_p}) + m_n^s \theta_f$

e

$m_n^s \theta_f \subseteq tf(m_n^2 \theta_n) + f^*(m_p^2) \theta_f + m_n^{s+1} \theta_f$

Então:

f é $s-1$ -determinado.

Prova:

A proposição 5.2 implica que $tf(m_n^{\theta_n}) + wf(m_p^{\theta_p})$ é um C_n -módulo.

Então:

$tf(m_n^2 \theta_n) + wf(m_p^2 \theta_p) = tf(m_n^2 \theta_n) + f^*(m_p^2) \theta_f \supset m_n^s \theta_f$.

Com estas hipóteses, a Proposição 4.2 implica que

$$tg(m_{n,n}^2) + wg(m_{p,p}^2) \supseteq m_{n,g}^s \quad \text{para todo } g \text{ tal que:}$$

$$j^{s-1}g(0) = j^{s-1}f(0). \quad \text{Logo } f \text{ é } s\text{-1-determinado.}$$

Observação:

As proposições 5.2 e 5.3 são adaptações das Proposições 3.8 e 3.15 de Du Plessis [8] para o caso específico em que a A -órbita de f é aberta na K -órbita de f . Veja também a Proposição 2.16 de Gaffney [10].

Na Proposição 3.8, no caso geral, (ver discussão na p.); Du Plessis obtém que f é s -determinado

Para maior facilidade de comparação, vamos enunciar a Proposição 3.15 [8]:

"Proposição 3.15 - Du Plessis-[8]"

Se $D \subset \{tf(\theta_n) + wf(\theta_p)\} \cap m_{n,n}^s + m_{n,f}^s (s \geq 1)$ é um C_n -módulo e se:

$$m_{n,f}^s \subset tf(m_{n,n}^s) + wf(m_{p,p}^s) + m_{n,f}^{s+1}$$

e

$$m_{n,f}^{s+1} \subset tf(m_{n,n}^2) + f^*(m_p)D + m_{n,f}^{s+2}$$

Então f é s -determinado."

Observe que na Proposição 5.3, precisamos ter

$D = f^*(m_p)\theta_f \subset tf(m_{n,n}^s) + wf(m_{p,p}^s) + m_{n,f}^s$. No entanto, eliminamos a segunda hipótese de 3.15.

Nas aplicações, o corolário seguinte é útil.

Corolário 5.4:

$$\text{Se } f^*(m_p)_{\theta_f} \subseteq \text{tf}(m_n)_{\theta_n} + \text{wf}(m_p)_{\theta_p} + m_n^s_{\theta_f}$$

e

$$m_n^s_{\theta_g} \subseteq \text{tg}(m_n)_{\theta_n} + g^*(m_p^2)_{\theta_g} + m_n^{s+1}_{\theta_g}, \quad \forall g \text{ tal que}$$

$$j^{s-1}_g(0) = j^{s-1}_f(0). \text{ Então, } f \text{ é } s\text{-1-determinado.}$$

Nos exemplos 5.5 e 5.6 abaixo, fica claro como podem ser aplicados os resultados obtidos para a obtenção de representante para uma A -órbita aberta em uma dada K -órbita: O Teorema 5.1 pode ser usado para a obtenção de um *candidato* a representante e as Proposições 5.2 e 5.3 podem ser usadas para verificar se o *candidato* possui a propriedade desejada.

Exemplo 5.5:

Seja $f_o(x,y) = (x^2, y^2)$ o representante da K -órbita de tipo $\Sigma^{2,0}; I_{22}$ (segundo Mather [26, IV]).

$$\text{Então } \text{tf}_o(m_2)_{\theta_2} + f_o^*(m_2)_{\theta_{f_o}} = m_2^2_{\theta_{f_o}}$$

Logo, pela Proposição 2.2, f_o é 2- K -determinado.

Além disso

$$\frac{\theta_{f_o}}{\text{tf}_o(\theta_2) + \text{wf}_o(\theta_2) + f_o^*(m_2)_{\theta_{f_o}}} = \cdot R\left\{ \begin{bmatrix} y \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ x \end{bmatrix} \right\}$$

$$\text{Seja } f_o + a_1 f_{o1} \begin{bmatrix} y \\ 0 \end{bmatrix} + a_2 f_{o2} \begin{bmatrix} 0 \\ x \end{bmatrix} \quad (*),$$

(f_{o1} e f_{o2} são as funções coordenadas de f_o).

É fácil mudar coordenadas de modo que (*) se reduza a:

$$f_a(x,y) = \begin{cases} x^2 + y^3 + \alpha(x,y) \\ y^2 + ax^3 + \beta(x,y) \end{cases} \quad \alpha, \beta \in m_2^4 C_2$$

Temos:

$$tf_a(m_2^{\theta_2}) + f_a^*(m_2^2)_{f_a} \supset m_2^4_{f_a}$$

Logo, da Proposição 5.2, é suficiente verificar se a A -órbita de f_a é aberta na K -órbita módulo $m_2^4_{f_a}$.

$$\text{Como } df_a = \begin{bmatrix} 2x & 3y^2 \\ 3ax^2 & 2y \end{bmatrix} \text{ e } \Delta \equiv xy \pmod{m_2^4_{f_a}},$$

$$\text{temos apenas que examinar se } \begin{bmatrix} 0 \\ x^3 \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} y^3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

pertencem a $T_{f_a} A$.

Temos:

$$(1) \begin{bmatrix} 2x^2 \\ 3ax^3 \end{bmatrix} \equiv 0 \pmod{T_{f_a} A + m_2^4_{f_a}} \quad (2) \begin{bmatrix} 3y^3 \\ 2y^2 \end{bmatrix} \equiv 0 \pmod{T_{f_a} A + m_2^4_{f_a}}$$

$$\text{Logo } (3) \begin{bmatrix} 2x^2 + 3y^3 \\ 3ax^3 + 2y^2 \end{bmatrix} \equiv 0. \text{ Além disso } (4) \begin{bmatrix} 2x^2 + 2y^3 \\ 3ax^3 + 3y^2 \end{bmatrix} \equiv 0 \pmod{T_{f_a} A + m_2^4_{f_a}}$$

$$\text{De (3) e (4) vem: (5) } \begin{bmatrix} y^3 \\ -y^2 \end{bmatrix} \equiv 0 \text{ . (5) e (2) } \Rightarrow \begin{bmatrix} y^3 \\ 0 \end{bmatrix} \in T_{f_a} A.$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ x^3 \end{bmatrix} \in T_{f_a} A, \text{ analogamente}$$

∴ Para todo $a \neq 0$, f_a tem a propriedade: " $A(f)$ aberta em $K(f)$."

Do Corolário 5.4 concluímos que f_a é 3-determinado.

Ficou também mostrado acima que o caminho (t, x^2+y^3, y^2+tx^3) é trivial se $t > 0$, ou se $t < 0$. Como $(x^2+y^3, y^2+x^3) \sim_A (x^2+y^3, y^2-x^3)$, a análise se completa, isto é, $K(x^2, y^2)$ contém uma única A -órbita aberta, representada por: (x^2+y^3, y^2+x^3) .

Exemplo 5.6:

$K(x^2-y^2, xy)$, $\Sigma^{2,0}$ -Singularidade-tipo $II_{2,2}$.

$$\text{Seja } f(x,y) \text{ definido por: } \begin{cases} u(x,y) = x^2-y^2+x^3+y^3 \\ v(x,y) = xy \end{cases}$$

Novamente, vamos ter:

$$tf(m_2\theta_2) + wf(m_2\theta_2) + m_2^4\theta_f = tf(m_2\theta_2) + f^*(m_2)\theta_f,$$

ou seja, a A -órbita de f é aberta na K -órbita.

Os cálculos seguem abaixo:

$$df = \begin{bmatrix} 2x+3x^2 & -2y+3y^2 \\ y & x \end{bmatrix}$$

$$\Delta = 2x^2 + 3x^3 + 2y^2 - 3y^3 = 2(x^2 + y^2) + 3(x^3 - y^3)$$

$$\Delta x = 2x^3 + 2xy^2 \pmod{m_2^4 C_2} \quad \therefore x^3 \theta_f \equiv -xy^2 \theta_f \pmod{T_f A + m_2^4 \theta_f}$$

$$\Delta y = 2x^2 y + 2y^3 \pmod{m_2^4 C_2} \quad \therefore y^3 \theta_f \equiv -x^2 y \theta_f \pmod{T_f A + m_2^4 \theta_f}$$

De

$$\Delta = 2(x^2 + y^2) + 3(x^3 - y^3)$$

e

$$\text{vem: } (4x^2 + 5x^3 - y^3) \theta_f \equiv 0 \pmod{T_f A + m_2^4 \theta_f}$$

$$2u = 2x^2 - 2y^2 + 2(x^3 + y^3)$$

(*)

Por outro lado

$$tf(x, 0) = \begin{bmatrix} 2x^2 + 3x^3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \therefore \quad \begin{bmatrix} x^2 \\ 0 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} -3/2 & x^3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (**)$$

$$(*) \quad e \quad (**) \Rightarrow \begin{bmatrix} -x^3 - y^3 \\ 0 \end{bmatrix} \equiv 0 \quad (i)$$

$$\text{De } tf(0, x) = \begin{bmatrix} -2xy + 3xy^2 \\ x^2 \end{bmatrix} = 0 \quad e \quad \begin{bmatrix} xy^2 \\ 0 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} -x^3 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ obtemos:}$$

$$\begin{bmatrix} -3x^3 \\ x^2 \end{bmatrix} \equiv 0 \pmod{T_f A + m_2^4 \theta_f}$$

Usando (*) novamente, vem:

$$4. \begin{bmatrix} -3x^3 \\ x^2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 4x^2 + 5x^3 - y^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12x^3 \\ -5x^3 + y^3 \end{bmatrix} \in T_f A + m_2^4 \theta_f$$

Além disso:

$$\begin{bmatrix} -12x^3 \\ -5x^3+y^3 \end{bmatrix} + 5tf(0,x^2) = \begin{bmatrix} -12x^3-10x^2y \\ y^3 \end{bmatrix} \in T_f A + m_{2\theta_f}^4$$

Usando:

$$\begin{bmatrix} x^2y \\ 0 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} -y^3 \\ 0 \end{bmatrix} \pmod{T_f A + m_{2\theta_f}^4} \text{ na expressão acima, temos:}$$

$$\begin{bmatrix} -12x^3+10y^3 \\ y^3 \end{bmatrix} \equiv 0 \quad (***)$$

$$(***) \text{ e } tf(0,xy) \text{ implicam } \begin{bmatrix} x^3-y^3 \\ 0 \end{bmatrix} \in T_f A + m_{2\theta_f}^4 \quad (ii)$$

$$\text{De (i) e (ii), vem: } \begin{bmatrix} x^3 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y^3 \\ 0 \end{bmatrix} \in T_f A + m_{2\theta_f}^4$$

É fácil obter os demais termos.

Pode-se verificar que:

$$\begin{cases} u = x^2 - y^2 + x^3 + y^3 \\ v = xy \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} u = x^2 - y^2 + x^3 - xy^2 \\ v = xy \end{cases}$$

não são A -equivalentes. Os mesmos argumentos do exemplo anterior mostram que estas são as duas A -órbitas abertas de

$K(x^2 - y^2, xy)$.

Este exemplo também mostra que é possível termos:

$f \sim_K g$, $A(f)$ e $A(g)$ ambas abertas em $K(f)$, mas f e g não A-equivalentes. No entanto, se f e g são germes *analíticos complexos*, obtém-se a A-equivalência entre f e g .

O teorema seguinte tem essencialmente a mesma prova da da por Mather [26, IV] para germes complexos infinitesimalmente es
táveis:

Teorema 5.7:

Sejam f e g germes analíticos complexos e K -equivalentes. Se $A(f)$ e $A(g)$ são ambas abertas em $K(f)$, então f e g são A-equivalentes.

Prova:

Seja $r = \dim_E \frac{m_n^{\theta_f}}{tf(m_n^{\theta_n}) + f^*(m_p^{\theta_f})}$, $E = R$ ou C .

Consideremos em $J^s(n, p)$, o conjunto:

$$V^s = \{z \in J^s(n, p) \mid \dim_E \frac{m_n^{\theta_f}}{tf(m_n^{\theta_n}) + wf(m_p^{\theta_p})} \geq r\}$$

onde f é representante de z .

A escolha de s é feita de modo que todo germe de A-codimensão = r seja s -1-determinado: basta tomar $s = 2k+1$, com $tf(m_n^{\theta_n}) + wf(m_p^{\theta_p}) \supset m_n^k \theta_f$. (Ver Gaffney [12] ou Du Plessis [8]).

V^s é uma variedade algébrica e

$$U^S = \{z \in V^S \mid \dim_E \frac{m_n^\theta f}{tf(m_n^\theta) + wf(m_p^\theta)} = r\}$$

é um subconjunto Zariski-aberto de V .

Logo $V^S \cap \overline{K^S(f)} = \overline{K^S(f)}$ é uma variedade algébrica com $U^S \cap \overline{K^S(f)}$, conjunto Zariski-aberto de $\overline{K^S(f)}$. Portanto $(U^S \cap \overline{K^S(f)})^c$ é um conjunto algébrico. Se $U^S \cap \overline{K^S(f)} \neq \emptyset$, $[U^S \cap \overline{K^S(f)}]^c$ é subvariedade algébrica própria de $\overline{K^S(f)}$.

No caso complexo, $K^S(f)$ é conexo, pois K^S é conexo e a ação de K^S em J^S é holomorfa. Como o complemento de qualquer subvariedade analítica complexa e fechada é conexo, segue-se que $U^S \cap \overline{K^S(f)}$ é conexo.

Consideremos agora a partição de $\overline{K^S(f)} \cap U^S$ em A^S -órbitas. Por hipótese, cada membro da partição é aberto. Seu complementar é uma reunião de abertos; logo, cada A^S -órbita é também fechada em $\overline{K^S(f)} \cap U^S$.

Portanto, $U^S \cap \overline{K^S(f)}$ é constituído de uma única A^S -órbita. A hipótese sobre s conclui o teorema.

§ 5.2. Singularidades de tipo Σ^1 e $\Sigma^{2,0}$ e A -órbitas abertas. Aplicações

A proposição seguinte classifica as A -órbitas abertas em $K(f)$ onde $f : (R^2, 0) \rightarrow (R^2, 0)$ é germe de tipo Σ^1 :

Proposição 5.8:

A K -órbita de (x, y^r) tem A -órbita aberta se e somente se $r \leq 5$. As formas normais são:

$$(1) \begin{bmatrix} u=x \\ v=y \end{bmatrix} \quad (2) \begin{bmatrix} u=x \\ v=y^2 \end{bmatrix} \quad (3) \begin{bmatrix} u=x \\ v=y^3+xy \end{bmatrix} \quad (4) \begin{bmatrix} u=x \\ v=y^4+xy \end{bmatrix} \quad (5) \begin{bmatrix} u=x \\ v=y^5+xy+xy^3 \end{bmatrix}$$

Prova:

Usaremos o seguinte resultado:

(Du Plessis [8] : Proposição 4.8: Um germe finitamente determinado $f : (R^{m+1}, 0) \rightarrow (R^{m+1}, 0)$ de rank m pode ser escrito, com uma conveniente mudança de coordenadas, sob a forma:

$$f(\underline{x}, y) = (\underline{x}, y^r + Q_1(\underline{x})y + \dots + Q_{r-2}(\underline{x})y^{r-2}) ,$$

onde $\underline{x} = (x_1, \dots, x_m)$ e $Q_i(\underline{x})$ ($i = 1, \dots, r-2$) é um polinômio em $x_1, \dots, x_m$ sem termo constante.

Não é difícil ver que $xy \neq 0$ é uma condição necessária para que $A(f)$ seja aberta em $K(f)$.

Portanto, f pode ser escrita como:

$$f(x, y) = \begin{bmatrix} u(x, y) = x \\ v(x, y) = y^r + xy + Q_2(x)y^2 + \dots + Q_{r-2}(x)y^{r-2} \end{bmatrix} \quad (*)$$

A expressão acima ainda pode ser colocada na forma:

$$\begin{bmatrix} u(x, y) = x \\ v(x, y) = y^r + xy + \sum_{i=2}^{r-2} a_i xy^i + x^2 Q_2(x)y^2 + \sum_{j=3}^{r-2} x^2 Q_j(x)y^j \end{bmatrix} \quad (**)$$

Com a mudança de coordenadas: $y = Y - xQ_2(x)Y^2$, obtemos:

$$\begin{cases} u(x,Y) = x \\ v(x,Y) = Y^r + xY + \sum_{i=2}^{r-2} a_i x Y^i + \sum_{j=3}^{r-2} x^2 \tilde{Q}_j(x) Y^j + \tilde{R}(x,Y) \quad \text{com } \tilde{R} \in m_n^{2r} \theta_f \end{cases}$$

Repetindo este processo, podemos eliminar $x^2 \tilde{Q}_j(x) Y^3$ e assim sucessivamente.

Portanto (**) é equivalente a:

$$\begin{cases} u(x,y) = x \\ v(x,y) = y^r + xy + \sum_{i=2}^{r-2} a_i xy^i + R(x,y), \quad R \in m_n^{2r} \theta_f \end{cases}$$

Agora:

$$Df = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ y + \sum_{i=2}^{r-2} a_i Y^i & ry^{r-1} + x + \sum_{i=2}^{r-2} i a_i xy^{i-1} \end{bmatrix}$$

$$\text{e } \Delta(f) = ry^{r-1} + x + \sum_{i=2}^{r-2} i a_i xy^{i-1}.$$

Então:

$$\text{tf}(m_2 \theta_2) + f^*(m_2)_{\theta_f} + m_2^{r+1} \theta_f \supseteq m_2^r \theta_f$$

e

$$\text{tf}(m_2 \theta_2) + f^*(m_2^2)_{\theta_f} + m_2^{2r-1} \theta_f \supseteq \langle x^2, xy^{r-1}, y^{2r-2} \rangle_{\theta_f} \supseteq m_n^{2r-2} \theta_f$$

$$\text{Uma base para } N_{f_o}^K \text{ é : } \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ y^2 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} 0 \\ y^{r-2} \end{bmatrix}$$

Usando o Teorema 5.1 e a Proposição 5.2, para encontrar A-órbitas abertas, é suficiente determinar condições sobre a_i , de modo que:

$$f_i \begin{bmatrix} 0 \\ y^i \end{bmatrix} \in \text{tf}(m_2^{\theta_2}) + \text{wf}(m_2^{\theta_2}) + m_2^{2r-2\theta_f}$$

onde $f_1 = u = x$ $f_2 = v = y^r + xy + \sum_{i=2}^{r-2} a_i xy^i$ e $1 \leq j \leq r-2$.

Ou, equivalentemente:

Mostrar que

$$\begin{bmatrix} 0 \\ xy^i \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} 0 \\ y^i \end{bmatrix} \text{ pertencem a } \text{tf}(m_2^{\theta_2}) + \text{wf}(m_2^{\theta_2}) + m_2^{2r-2\theta_f}$$

$$i = 1, \dots, r-2 \quad r \leq j \leq 2r-3.$$

Portanto, existem $2r-4$ indeterminadas e as equações entre elas são:

$$\text{tf}(0, y^j) = (0, ry^{j+r-1} + xy^j + \sum_{i=2}^{r-2} a_i xy^{j+i-1}) \quad 1 \leq j \leq r-2$$

$$\text{tf}(x, 0) - (x, 0) = (0, xy + \sum_{i=2}^{r-2} a_i xy^i)$$

$$\text{tf}(v, 0) - (v, 0) = (0, v(y + \sum_{i=2}^{r-2} a_i y^i))$$

$$(0, v) = (0, y^r + xy + \sum_{i=2}^{r-2} a_i xy^i)$$

Portanto, a condição necessária para existência de solução é: $r+1 \geq 2r-4$ ou seja $r \leq 5$.

Evidentemente, $r = 1, 2, 3$ correspondem aos germes estáveis.

(i) Caso $r = 4$

$$\text{Seja } f_a(x, y) = \begin{cases} u = x \\ v = y^4 + xy + axy^2 \end{cases}$$

$$Df_a = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ y+ay^2 & 4y^3+x+2axy \end{bmatrix}$$

As equações são:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 4y^4+xy+2axy^2 \end{bmatrix} \equiv 0 \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 4y^5+xy^2 \end{bmatrix} \equiv 0 \quad \begin{bmatrix} 0 \\ xy+axy^2 \end{bmatrix} \equiv 0$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ y^4+xy+axy^2 \end{bmatrix} \equiv 0 \quad \begin{bmatrix} 0 \\ y^5+xy^2 \end{bmatrix} \equiv 0$$

Este sistema tem solução para todo a , isto é:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ y^4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ y^5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ xy \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ xy^2 \end{bmatrix} \text{ pertencem a } T_{f_a} A \text{ e } a$$

A -órbita é aberta no K -órbita, $\forall a$.

Como $\begin{bmatrix} 0 \\ xy^2 \end{bmatrix} \in T_{f_a} A$, $\forall a$, segue-se que o caminho

$F(a, x, y) = (a, f_a(x, y))$ é trivial.

Portanto, $\forall a$, $f_a \underset{A}{\approx} f_0 = \begin{cases} x \\ y^4 + xy \end{cases}$

Dada qualquer deformação de ordem 5 de f_0 ,

$$f(x, y) = \begin{cases} x \\ y^4 + xy + q(x, y) \end{cases} \quad \text{com } q(x, y) \in m_2^5 \theta_f,$$

ode-se ver facilmente que

$$f \underset{A}{\approx} \begin{cases} u = x \\ v = y^4 + xy + \alpha y^5 + R(x, y), \end{cases} \quad R(x, y) \in m_2^6 \theta_f,$$

que por sua vez é equivalente a:

$$(*) \quad \begin{cases} u = x \\ v = y^4 + xy + axy^2 + R(x, y), \end{cases} \quad R(x, y) \in m_2^6 \theta_f$$

Pelo Corolário 5.4, obtemos que f_a é 5-determinado.

(De fato: $tg(m_2 \theta_2) + g^*(m_2^2) \theta_g + m_2^7 \theta_g \supseteq \langle x^2, xy^3, y^6 \rangle \theta_f \supseteq m_2^6 \theta_g$, $\forall g$ tal que $j^5 g = j^5 f$).

Portanto (*) é equivalente a $\begin{cases} u = x \\ v = y^4 + xy + axy^2 \end{cases}$,

o que mostra que f_0 (e portanto $f_a, \forall a$) é 4-determinado.

Observação:

Du Plessis em [8], Exemplo 3.32 obtém que $(x, xy+y^4)$ é 4-A-determinado, como consequência do Teorema 3.31, que ele próprio classifica de complicado. Achamos que nossa prova da 4-A-determinação de f_0 envolve um esforço bem menor.

(ii) Caso $r = 5$

$$f_{ab} = \begin{cases} u = x \\ v = y^5 + xy + axy^2 + bxy^3 \end{cases}$$

$$df_{ab} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ y + ay^2 + by^3 & 5y^4 + x + 2axy + 3bxy^2 \end{bmatrix}$$

As equações são:

$$5y^5 + xy + 2axy^2 + 3bxy^3 = 0$$

$$5y^6 + xy^2 + 2axy^3 = 0$$

$$5y^7 + xy^3 = 0$$

$$xy + axy^2 + bxy^3 = 0$$

$$y^6 + ay^7 + xy^2 + 2axy^3 = 0$$

$$y^5 + xy + axy^2 + bxy^3 = 0$$

y^7	y^6	y^5	xy	xy^2	xy^3
0	0	5	1	$2a$	$3b$
0	5	0	0	1	$2a$
5	0	0	0	0	1
0	0	0	1	a	b
a	1	0	0	1	$2a$
0	0	1	1	a	b

$$= \Delta_{ab}$$

$$\frac{\Delta_{ab}}{5} = -7a^2 + 8b$$

...

$A(f_{ab})$ é aberta em $K(f_{ab})$ se e somente se $-7a^2 + 8b \neq 0$.

Consideremos:

$$f_{0-1} : \begin{cases} u = x \\ v = y^5 + xy - xy^3 \end{cases} \quad \text{e} \quad f_{01} : \begin{cases} u = x \\ v = y^5 + xy + xy^3 \end{cases},$$

Então

$$f_{ab} \underset{A}{\simeq} f_{0-1} \quad \text{se} \quad \Delta_{ab} < 0$$

$$f_{ab} \underset{A}{\simeq} f_{01} \quad \text{se} \quad \Delta_{ab} > 0$$

(Isto acontece pois: para o caminho

$$F(t_1, t_2, x, y) = (t_1, t_2, f_{0-1} + t_1 xy^2 + t_2 xy^3) = (t_1, t_2, f(x, y, t_1, t_2))$$

tem-se: $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ xy^2 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ xy^3 \end{bmatrix}$ pertencem a

$$tF(m_4^{\Psi}{}_{R^2 \times R^2}) + wf(m_4^{\Psi}{}_{R^2 \times R^2}) \text{ desde que } -7t_1^2 + 8(t_2 - 1) < 0$$

$\therefore F$ é trivial.

O caso $\Delta > 0$ segue analogamente).

$A(f_{0-1})$ e $A(f_{01})$ são distintas.

Isto pode ser visto da seguinte forma:

$$\begin{array}{ll} \text{Consideremos } S_1(x,y) = (-x,y) & P_1(u,v) = (-u,v) \\ S_2(x,y) = (x,-y) & P_2(u,v) = (u,-v) \\ S_3(x,y) = I_{x,y} = (x,y) & P_3(u,v) = (u,v) \end{array}$$

$$e \quad p_i \circ f_{01} \circ s_j \neq f_{0-1} ; \quad \forall i,j = 1,2,3.$$

Do Corolário 5.4, obtemos que f_{0-1} (ou f_{01}) é 7-de-terminado. Esta estimativa é exata, uma vez que:

$f(x,y) = y^5 + xy - xy^3 - 5y^7$ não satisfaz à propriedade: " $A(f)$ aberta em $K(f)$ ". Fazendo $Y = y + y^3$ verificamos facilmente que $\Delta(f) = 0$.

$\therefore f_{0-1}$ não é 6-determinado.

Corolário 5.9:

Todo germe $f : (R^2, 0) \rightarrow (R^2, 0)$ finitamente A-determinado e tal que $K(f) = K(x, y^r)$ com $r \geq 6$, tem A-modalidade ≥ 1 .

Embora o conceito de modalidade seja delicado a seguinte colocação é suficiente para nossas aplicações:

Seja $f : (R^n, 0) \rightarrow (R^p, 0)$ germe A -finitamente determinado. Dizemos que f é (no máximo) r -modal se existe uma vizinhança de $j^k f(0)$ em $J^k(n, p)$ coberta por um número finito de famílias de classes de A -equivalência, cada uma das quais dependendo de (no máximo) r -parâmetros.

Observe que k pode ser escolhido de modo que todo g com $j^k g(0)$ suficientemente próximo de $j^k f(0)$, é no máximo $k-1$ -determinado.

Em nosso caso, a seguinte observação é útil:

Seja f germe A -finitamente determinado.

Indiquemos por $m_A(f)$ = A -modalidade de f

$m_K(f)$ = a K -modalidade de f

e $m_K A(f)$ = a A -modalidade de f em $K(f)$.

Então $m_A(f) \geq m_K(f) + m_K A(f)$.

Vamos agora completar a análise das singularidades de tipo $\Sigma^{2,0}$ iniciada nos exemplos 5.5 e 5.6.

Exemplo 5.10.

A K -órbita de f_0 :
$$\begin{cases} u = x^2 + y^3 \\ v = xy \end{cases} \quad \text{não tem } A\text{-órbita}$$

aberta.

Seja $f(x, y) :$
$$\begin{cases} u = x^2 + y^3 + ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dxy^3 + ey^4 \\ v = xy \end{cases}$$

Temos, então:

$$tf(m_2^{\theta_2}) + f^*(m_2)^{\theta_f} \supseteq m_2^3{}^{\theta_f}$$

e:

$$tf(m_2^{\theta_2}) + f^*(m_2^2)^{\theta_f} \supseteq m_2^5{}^{\theta_f}$$

Observemos que $(x^4, 0), (x^2y^2, 0), (x^3y, 0) \in wf(m_2^2{}^{\theta_2})(\text{mod } m_2^5{}^{\theta_f})$.

Agora

$$df = \begin{bmatrix} 2x+3ax^2+2bxy+cy^2+dy^3 & 3y^2+bx^2+2cxy+3dxy^2+4ey^3 \\ y & x \end{bmatrix}$$

As equações que devemos considerar são:

$$df(\alpha, 0) \equiv 0, \quad df(0, \alpha) \equiv 0, \quad (u, 0) \equiv 0, \quad (v, 0) \equiv 0$$

$$(0, u) \equiv 0, \quad (0, v) \equiv 0, \quad \text{onde a congruência é}$$

$\text{mod } T_f A + m_2^5{}^{\theta_f}$ e α percorre o conjunto:

$$\{1, x, y, x^2, xy, y^2, x^3, x^2y, xy^2, y^3\}.$$

Portanto as equações são:

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} 2x+3ax^2+cy^2+dy^3 \\ y \end{bmatrix} \equiv 0 & A_2 &= \begin{bmatrix} 3y^2+bx^2+3dxy^2+4ey^3 \\ x \end{bmatrix} \equiv 0 \\ A_3 &= \begin{bmatrix} 2x^2+3ax^3+cxy^2+dxy^3 \\ 0 \end{bmatrix} \equiv 0 & A_4 &= \begin{bmatrix} 3ax^2y + cy^3 + dy^4 \\ y^2 \end{bmatrix} \equiv 0 \end{aligned}$$

$$A_5 = \begin{bmatrix} 3xy^2 + bx^3 + 4exy^3 \\ x^2 \end{bmatrix} \equiv 0 \quad A_6 = \begin{bmatrix} 3y^3 + bx^2y + 3dxy^3 + 4ey^4 \\ 0 \end{bmatrix} \equiv 0$$

$$A_7 = \begin{bmatrix} 2x^3 \\ x^2y \end{bmatrix} \equiv 0 \quad A_8 = \begin{bmatrix} 2x^2y + cxy^3 \\ xy^2 \end{bmatrix} \equiv 0 \quad A_9 = \begin{bmatrix} 2xy^2 + cy^4 \\ y^3 \end{bmatrix} \equiv 0$$

$$A_{10} = \begin{bmatrix} 0 \\ x^3 \end{bmatrix} \equiv 0 \quad A_{11} = \begin{bmatrix} 3xy^3 \\ x^2y \end{bmatrix} \equiv 0 \quad A_{12} = \begin{bmatrix} 3y^4 \\ xy^2 \end{bmatrix} \equiv 0 \quad A_{13} = \begin{bmatrix} 2xy^3 \\ y^4 \end{bmatrix} \equiv 0$$

$$A_{14} = \begin{bmatrix} x^2 + y^3 + ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dxy^3 + ey^4 \\ 0 \end{bmatrix} \equiv 0$$

$$A_{15} = \begin{bmatrix} 0 \\ x^2 + y^3 + bx^2y + cxy^2 + ey^4 \end{bmatrix} \equiv 0$$

O sistema obtido destas equações não tem solução.

Proposição 5.11:

Seja $f : (R^2, 0) \rightarrow (R^2, 0)$ de tipo $\Sigma^{2,0}$, A-finitamente determinado e tal que $Q(f)$ é de tipo:

$$(i) \quad I_{a,b} : \frac{R[[x,y]]}{\langle xy, x^a + y^b \rangle} \quad (b \geq a \geq 2)$$

$$(ii) \quad II_{a,b} : \frac{R[[x,y]]}{\langle xy, x^a - y^b \rangle} \quad (b \geq a \geq 2 \quad a, b \text{ pares})$$

ou

$$(iii) \quad IV_{a,b} : \frac{R[[x,y]]}{\langle x^2 + y^2, x^a \rangle}, \quad a \geq 3.$$

Então:

Em (i) e (ii) : A-modalidade de $f \geq 1$, sempre que $b > a \geq 2$.

Em (iii) : A-modalidade de $f \geq 1$ para todo $a \geq 3$.

Prova:

$$\text{Quando } a = 2, b = 2 \quad \left\{ \begin{array}{c} x^2 - y^2 + x^3 + xy^2 \\ xy \end{array} \right. \quad e \quad \left\{ \begin{array}{c} x^2 - y^2 + x^3 + y^3 \\ xy \end{array} \right.$$

são as A-órbitas abertas de $II_{2,2}$ (Exercício 5.6), e

$$\left\{ \begin{array}{c} x^2 + y^3 \\ y^2 + x^3 \end{array} \right. \quad \text{é a A-órbita aberta de } I_{2,2} \text{ (Exemplo 5.5)}$$

Se $a = 2, b = 3$ em $I_{2,3}$, $K(x^2 + y^3, xy)$ não tem A-órbitas abertas (Exemplo 5.10).

Da estrutura das singularidades estáveis de tipo $\Sigma^{2,0}$ (Les Lander [20], Lema 2.7) segue-se que:

Se $f \in I_{a,b}$ ou $II_{a,b}$ e $z = j^{a+b+1}_f(0)$, para to da vizinhança V_z de z em $J^{a+b+1}(2,2)$, temos:

$$V_z \cap K^{a+b+1}(xy, x^\alpha y^\beta) \neq \emptyset \quad \text{para } a \leq \alpha, \beta \leq b$$

Portanto, se $f \in I_{a,b}$ ou $II_{a,b}$ com $b > a \geq 2$,
 $V_z \cap K^{a+b+1}(xy, x^2 y^3) \neq \emptyset$, o que juntamente com o Exemplo 5.10,
 mostra que A-modalidade de $f \geq 1$.

Para $f \in IV_a$, $a \geq 3$, segue-se ainda de [20] (Lema 2.6)
 que para $z = j^{2a+1}f(0)$ e toda vizinhança V_z em $J^{2a+1}(2,2)$, que:

$$V_z \cap K^{2a+1}(y, x^q) \neq \emptyset \quad \text{onde } 1 \leq q \leq 2a-1.$$

Portanto, se $a \geq 4$, usando o Corolário 5.9, o resultado é obtido

Caso $a = 3$

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 + y^2 \\ x^3 + p(x,y) \end{cases}$$

onde $p(x,y) \in m_{2f}^3$.

Se $A(f)$ fosse aberta em $K(f)$ deveríamos ter:

$$tf(m_{2f}^3) + wf(m_{2f}^3) \supseteq m_{2f}^3$$

Mas, analisando:

$$\begin{bmatrix} 2x & 2y \\ 3x^2 + p_x & p_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_1(x,y) \\ \epsilon_2(x,y) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \eta_1(x^2 + y^2, x^3 + p(x,y)) \\ \eta_2(x^2 + y^2, x^3 + p(x,y)) \end{bmatrix},$$

vemos que:

$tf(x,0)$, $tf(y,0)$, $tf(0,x)$, $tf(0,y)$, $(u,0)$ e $(0,v)$ dão somente duas equações linearmente independentes, módulo $tf(m_2^{\theta_2}) + wf(m_2^{\theta_2}) + m_2^4 \theta_2$.

Estas equações são:

$$\begin{vmatrix} 0 \\ v \end{vmatrix} \equiv 0 \quad e \quad \begin{vmatrix} 0 \\ \Delta \end{vmatrix} \equiv 0 \pmod{tf(m_2^{\theta_2}) + wf(m_2^{\theta_2}) + m_2^4 \theta_2}$$

onde $\Delta = 2xp_y - 6yx^2 - 2yp_x$.

Logo, não será possível obter todos os termos de ordem 3 em $T_f A$.

∴ $K(x^2+y^2, x^3)$ não tem A-órbita aberta e A-modalidade de $f \geq 1$.

Bibliografia

- [1] - ANTOINE, Ph - "Image réciproque d'un point par une application différentiable en un point critique" - C.R.Acad. Sc. Paris, 288, série A (1979), p. 347.
- [2] - ARNOL'D, V.I. - "Normal forms of functions in neighbourhoods of degenerate critical points- Russian Math. Surveys (29)(2) (1974), p. 10-50.
- [3] - ARNOL'D, V.I. - "Normal forms for functions near degenerate critical points, the Weyl groups A_k, D_k, E_k and Lagrangean Singularities" - Funct. Anal. Appl., 6 (1973), p. 254-272.
- [4] - BOCHNAK, J e KUO, T.C. - "Rigid and finitely V-determined germs of C^∞ - mappings" - Can. J. Math., 25 (1973), p. 727-732.
- [5] - DAMON, J. - "Finite Determinacy and Topological Triviality I", Inv. Math., 62 (1980), p. 299-324.
- [6] - DAMON, J. - "Finite Determinacy and Topological Triviality II". Comp. Math., 47 (2) (1982), p. 101-132.
- [7] - DAMON, J. - "Topological Triviality in Versal Unfoldings" (preprint).
- [8] - DU PLESSIS, A. - "On the Determinacy of Smooth Map-Germs" - Inv. Math., 58 (1980), p. 107-160.
- [9] - DU PLESSIS, A. e BRODERSEN, H. - "On Smooth ∞ -determinacy and topological finite determinacy" (Preliminary Version).
- [10] - GAFFNEY, T. - "Properties of finitely-determined germs" - Thesis - Brandeis University (1975).
- [11] - GAFFNEY, T. - "On the order of determination of a finitely-determined germ". Inv. Math. 37 (1976), p. 83-92.
- [12] - GAFFNEY, T. - "A note on the order of determination of a finitely-determined germ" - Inv. Math., 52 (1979), p. 127-130.

- [13] - GIBSON, C.G. etc - "Topological Stability of Smooth Mappings" - Lecture Notes in Math, 552 (Springer-Verlag, 1976).
- [14] - GOLUBITSKY, M e GUILLEMIN, V. - "Stable Mappings and Their Singularities" - G.T. in Math., 14 Springer-Verlag (1974).
- [15] - KUCHARZ, W. - "Jets suffisants et fonctions de détermination finie" C.R. Acad. Sc. Paris, 284A (1977), p. 877-879.
- [16] - KRAMMER, K. - "An example in the singularities of Mappings" - Topology 13 (1974), p. 193-197.
- [17] - KUIPER, N.H. - " C^1 -equivalence of functions near isolated critical points" - Annals of Math. Studies 69 (1968).
- [18] - KUO, T.C. - "On C^0 -sufficiency of jets of potential functions" - Topology, 8 (1969), p. 167-171.
- [19] - KUO, T.C. - "Characterizations of V-sufficiency of jets" - Topology, 11 (1972), 115-131.
- [20] - LANDER, L. - "The Structure of the Thom - Boardman Singularities of Stable Germs with type $\Sigma^{2,0}$ ". Proc. London Math. Soc. (3) (1976), p. 113-137.
- [21] - LEFEBVRE, D. e POURPRIX, M.T. - "Conditions pour qu'un jet soit suffisant pour la C^q -équivalence de contact" C.R. Acad. Sc. Paris, 293 (1981), p. 31-33.
- [22] - LOJASIEWICZ e BOCHNAK - "A converse of the Kuiper-Kuo theorem" - Lecture Notes in Math 192 (Springer, Berlin, 1971), p. 254-261.
- [23] - MARTINET, J. - "Déploiements versels des applications différentiables et classification des applications stables" - Springer Lecture Notes in Math., 535 (1976).

- [24] - MARTINET, J. - "Déploiements Stables des germes de type finie et détermination finie des applications différentiables" - Bol. Soc. Bras. Mat., 7 (1976), p. 89-109.
- [25] - MARTINS, J. - "Suficiência de Jatos" - Dissertação de Mestrado - ICMSC-USP, São Carlos, (1980).
- [26] - MATHER, J.N. - "Stability of C^∞ -mappings:
 - I - The division theorem" - Ann. of Math., 87(1968), p.89-104.
 - II - Infinitesimal stability implies stability" - Ann. of Math. 89 (1969), p. 259-291.
 - III - Finitely determined map-germs" - Publ. Math. IHES, 35 (1969), p. 127-156.
 - IV - Classification of Stable germs by R-algebras" Publ. Math. IHES, 37 (1970), p. 223-248.
 - V - Transversality" - Advances in Math, 4(1970), p.301-335.
 - VI - The nice dimensions" - Lecture Notes in Math, 192 (Springer, Berlin, 1971), p. 207-255.
- [27] - MATHER, J.N. - "Generic projections" - Ann. of Math, 98(1973), p. 226-245.
- [28] - MATHER, J.N. - "Stratifications and mappings" - Proc. Dynamical Systems (ed. M.M. Peixoto, Academic Press, 1973), p. 195-232.
- [29] - TAKENS, F. - "A note on sufficiency of jets" - Inv. Math, 13 (1971), p. 225-231.
- [30] - TOUGERON, J.Cl. - "Idéaux de fonctions différentiables" Ergebnisse, Band 71 (Springer-Verlag, 1972).
- [31] - WALL, C.T.C. - "Are maps finitely determined in general?" - Bull. London Math. Soc., 11 (1979), p. 151-154.
- [32] - WALL, C.T.C. - "Finite Determinacy of Smooth map-germs" - Bull. London Math. Society, 13 (1981), p. 481-539.

- [33] - WALL, C.T.C. - "Classification of Unimodal isolated Singularities of Complete Intersections" (pre-print).
- [34] - WILSON, L. - "Infinitely determined map-germs" (pre-print).
- [35] - WILSON, L. - "Map-germs infinitely determined with respect to right-left equivalence" (pre-print) - Univ of Hawaii.