

I.C.M.S.C.

INSTITUTO DE CIÊNCIAS MATEMÁTICAS DE SÃO CARLOS

SOBRE ALGUNS INVARIANTES DIFERENCIÁVEIS
DE GERMES DE FUNÇÕES C^∞

Wilson Mauricio Tadini

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

SÃO CARLOS - SÃO PAULO
BRASIL

*Ao meu grande amigo Paulo
J. Adami*

SOBRE ALGUNS INVARIANTES DIFERENCIÁVEIS
DE GERMES DE FUNÇÕES C^∞

Wilson Mauricio Tadini

Grupo de Singularidades
ICMC - USP

Tese apresentada ao Instituto de
Ciências Matemáticas de São Carlos,
da Universidade de São Paulo, para
obtenção do Título de Doutor em
Ciências (Matemática)

Orientador: Prof. Dr. Gilberto Francisco Loibel

SÃO CARLOS - SP

1980

I N D I C E

INTRODUÇÃO	I
CAPÍTULO I	
PRELIMINARES	1
§ 1. Germes e Equivalência	1
§ 2. Determinação Finita	2
§ 3. Determinação Forte	3
§ 4. Símbolo de Boardman ([6], [18])	4
§ 5. Escada de um Ideal ([7])	5
§ 6. Funções Quase-Homogêneas e Semi-Quase-Homogêneas ..	7
§ 7. Modalidade	9
CAPÍTULO II	
(r, k) -DETERMINAÇÃO	13
§ 1. Caracterização da (r, k) -Determinação	13
§ 2. Perturbações em m_n de Germes Finitamente Determinados	25
§ 3. Alguns Equívocos da Literatura	28
CAPÍTULO III	
SEPARAÇÃO DE VARIÁVEIS	35
§ 1. Decomposições	35
§ 2. Invariante λ_0	48
§ 3. Alguns Invariantes Diferenciáveis	53
§ 4. Uma Condição Necessária para a Decomposição de um Germe em Duas Variáveis	59
§ 5. Apêndice	62
- Uma Análise das Singularidades 1-Modais	65
- Uma Análise das Singularidades 2-Modais, Estavelmente Equivalentes à Singularidades em Duas Variáveis	77
- Decomposição de uma Singularidade f m -Modal ($m \leq 2$), em Termos da Região $R(f)$	81
- Uplas de Invariantes para Singularidade m -Modais ($m \leq 2$), em Duas Variáveis	86

CAPÍTULO IV

SÍMBOLO DE BOARDMAN E (r, k) -DETERMINAÇÃO	99
--	----

CAPÍTULO V

COMPRIMENTO DO SÍMBOLO DE BOARDMAN E O GRAU DE UM POLI- NÔMIO	105
--	-----

BIBLIOGRAFIA	121
--------------------	-----

INTRODUÇÃO

Em Loibel e Tadini ([14]) um dos problemas atacados, foi a relação entre o grau de determinação de um germe, e o comprimento do seu símbolo de Boardman.

Posteriormente, constatamos que uma formulação mais forte de determinação finita, permitia obter resultados melhores. Isto nos levou ao conceito e à caracterização da (r,k) -determinação, através do Capítulo II.

Neste mesmo capítulo, nos preocupamos também com a estabilidade do referido conceito em relação a pequenas perturbações, registrando vários erros da literatura, relacionados com o tipo de problema atacado.

Paralelamente ao estudo do Capítulo II, surgiu o problema da decomposição (separação em blocos de variáveis) de um germe, que também envolvia a questão do símbolo de Boardman.

Tal problema foi abordado no Capítulo III, onde se sugeriram diversos invariantes diferenciáveis, através dos quais, exibimos condições necessárias e suficientes para a separação completa das variáveis, para certas classes de germes, e, condições necessárias para a separação em blocos de variáveis.

Tais invariantes também são aplicados no Capítulo IV.

C. G. Gibson (1979 - Singular points of smooth mappings) dá uma relação entre a determinação finita e o símbolo de Boardman de um germe. Acontece que tal relação se encontra em [14]. Por outro lado, a demonstração dada por Gibson, parece sugerir

que no caso polinomial, o comprimento do símbolo de Boardman é menor ou igual ao grau do polinômio, o que obviamente não é verdadeiro (ver exemplo V - (1.3)).

Em vista deste fato, no Capítulo V, damos uma condição suficiente para que o comprimento do símbolo de Boardman de um polinômio finitamente determinado, seja estritamente menor que o grau do polinômio.

CAPÍTULO I

PRELIMINARES

§ 1. Germes e Equivalências

Sejam $C_O(R^n)$ a R -álgebra dos germes de aplicações C^∞ $f : R^{n,0} \rightarrow R$ e $C_O(C^n)$ a C -álgebra dos germes de aplicações holomorfas $f : C^{n,0} \rightarrow C$. Para ambos os casos, denotaremos por m_n o único ideal maximal e $m_n^\alpha = m_n \dots m_n$ (α -vezes).

Considerando $K = R$ ou C , $x_1, \dots, x_n$ um sistema de coordenadas nas vizinhanças de $0 \in K^n$ e $f \in C_O(K^n)$, denotaremos por $\langle \partial f \rangle$, o ideal gerado por $\partial_1 f, \dots, \partial_n f$, com coeficientes em $C_O(K^n)$, onde $\partial_i f = \frac{\partial f}{\partial x_i}$ ($i = 1, \dots, n$).

Dado $f \in C_O(K^n)$, a sua *álgebra local* é definida como sendo o quociente $Q(f) = \frac{C_O(K^n)}{\langle \partial f \rangle}$, onde denotaremos por $\mu(f)$ a sua dimensão como K -espaço vetorial.

Seja R (resp. $\tilde{R}$) o grupo dos germes de difeomorfismos C^∞ $\psi : R^{n,0} \rightarrow R^{n,0}$ (resp. o grupo dos germes de aplicações bi-holomorfas $\psi : C^{n,0} \rightarrow C^{n,0}$).

Dois germes $f, g \in C_O(R^n)$ (resp. $C_O(C^n)$), são ditos *equivalentes*, se existir $\psi \in R$ (resp. $\psi \in \tilde{R}$) tal que $f \circ \psi = g$ (resp. $f \circ \psi = g$).

Dados I e J , ideais de $C_O(K^n)$, diremos que eles são *equivalentes*, se existir um isomorfismo de K -álgebras $\lambda : C_O(K^n) \rightarrow C_O(K^n)$, tal que, $\lambda(I) = J$.

§ 2. *Determinação Finita*

Um germe $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$ é dito *k-determinado*, onde k é um inteiro positivo, se para todo $g \in C_0(\mathbb{R}^n)$ com $j^k f(0) = j^k g(0)$, existir $\psi \in R$, tal que, $f \circ \psi = g$. Diremos também que f é *finitamente determinado*, se para algum inteiro positivo k , for k -determinado. Análogos conceitos são dados para o caso C .

Se f for k -determinado, diremos que k é um grau de determinação de f .

Em Mather, ([17]), temos o:

2.1. TEOREMA: Seja $f \in C_0(K^n)$.

Então, f é finitamente determinado, se e somente se, $\mu(f) < \infty$.

Salientamos que tal teorema em si, não determina um grau de determinação para f . Nesta linha, temos o:

2.2. TEOREMA ([17]): Seja $f \in C_0(K^n)$.

Se f é k -determinado, então

$$m_n^{k+1} \subset m_n^2 \langle \partial f \rangle.$$

A recíproca deste teorema é falsa, como podemos observar através do exemplo $f = x^3 + y^3$ em $C_0(K^2)$. Neste caso temos $m_2^3 \subset m_2^2 \langle x^2, y^2 \rangle$, com f 3-determinado mas não 2-determinado.

Para uma recíproca, temos o:

2.3. TEOREMA ([2]): Seja $f \in C_0(K^n)$.

Se $m_n^{k+1} \subset m_n^2 \langle \partial f \rangle$, então f é k -determinado.

Ainda para uma recíproca, Wasserman [25] provou o

2.4. TEOREMA: Seja $f \in C_0(R^n)$.

Se $m_n^k \subset m_n \langle \partial f \rangle$, então f é k -determinado.

Como podemos observar, as hipóteses de (2.4) implicam nas hipóteses de (2.3). Por outro lado, podemos ter $m_n^{k+1} \subset m_n^2 \langle \partial f \rangle$, sem termos $m_n^k \subset m_n \langle \partial f \rangle$, como mostra o exemplo $f = x^4 + y^5$. Neste caso temos $m_2^6 \subset m_2^2 \langle x^3, y^4 \rangle$, com $m_2^5 \not\subset m_2 \langle x^3, y^4 \rangle$ pois, $x^2 y^3 \notin \langle x^3, y^4 \rangle$.

Para encerrar o parágrafo, registremos o bonito resultado demonstrado por P. Stefan ([21]), dado pelo

2.5. TEOREMA: Seja $f \in C_0(R^n)$.

Então, f é k -determinado, se e somente se, $m_n^{k+1} \subset m_n \langle \partial(f+g) \rangle$, para todo $g \in m_n^{k+1}$.

§ 3. Determinação Forte

Conforme ([23]), Zeeman conjecturou numa conferência para o I.H.E.S. (Bûres - sur - Yvette) que:

"Dado $f \in C_0(R^n)$, temos:

f é k -determinado $\iff m_n^{k+1} \subset m_n^2 \langle \partial f \rangle$."

Acontece que tal conjectura é falsa conforme mostrou Siersma ([23]) através do exemplo $f(x,y) = x^3 + xy^3$, que é 4-determinado. Neste caso temos $m_2^5 \subset m_2^2 \langle \partial f \rangle$ com $m_2^5 \not\subset m_2^2 \langle \partial f \rangle$.

Aproveitando a conjectura de Zeeman, Siersma ([23]) inroduziu a seguinte

3.1. DEFINIÇÃO: Um germe $f \in C_0(R^n)$ é dito *fortemente k-determinado*, onde k é um inteiro positivo, se para todo $g \in C_0(R^n)$ com $j^k f(0) = j^k g(0)$, existir $\psi \in R$, com $j^1 \psi(0) = j^1 I_d(0)$ e $f \circ \psi = g$ (I_d é o germe da identidade). E, $f \in C_0(R^n)$ é dito *fortemente determinado*, se para algum inteiro positivo k , for fortemente k-determinado.

Com tal conceito, ele provou o

3.2. TEOREMA: Seja $f \in C_0(R^n)$.

Então, f é fortemente k-determinado, se e somente se, $m_n^{k+1} \subset m_n^2 \langle \partial f \rangle$.

§ 4. Símbolo de Boardman ([6], [18])

Dado um ideal $I \subset m_n$ de $C_0(K^n)$, definimos $\Delta_r I$ como sendo o ideal $I + I'$ de $C_0(K^n)$, onde I' é o ideal gerado pelos menores $(r+1) \times (r+1)$ da matriz $(\frac{\partial h_i}{\partial x_j})$, com $h_i \in I$.

Como podemos verificar facilmente, para a construção de I' é suficiente tomarmos apenas um conjunto de geradores de I . Também é fácil de se verificar que a construção de I' independe do sistema de coordenadas fixado nas vizinhanças de $0 \in K^n$.

Pondo $\Delta^1 I = \Delta_{n-1+1} I$, segue que $I = \Delta^0 I \subset \Delta^1 I \subset \dots \subset \Delta^s I \subset \dots \subset m_n \subset C_0(K^n)$.

Seja k o maior inteiro positivo tal que $\Delta^k I \subset m_n$. Nestas condições, diremos que $\Delta^k I$ é a *extensão crítica* de I e denotaremos por δI .

Como podemos observar, se $\delta I = \Delta^k I$, então o posto de I é $n-k$, onde definimos o *posto de um ideal* $J \subset m_n$ de $C_0(K^n)$ como sendo a dimensão de $\frac{J + m_n^2}{m_n^2}$ como K -espaço vetorial.

Sejam $\delta^\ell I = \delta(\delta^{\ell-1} I)$ ($\ell = 1, 2, \dots$) as extensões críticas sucessivas do ideal I , onde $\delta^0 I = I$. Definindo $i_{\ell+1} = n - \text{posto } \delta^\ell I$, diremos que I tem *símbolo de Boardman* $\Sigma_{i_1 i_2 \dots}$, o qual denotaremos por $B(I)$. No caso de $I = \langle f \rangle$, com $f \in m_n$, denotaremos $B(\langle f \rangle) = B_f$.

Se $B_f = \Sigma_{i_1 \dots i_k} 0$ com $i_k \neq 0$, definimos o *comprimento do símbolo de Boardman de f* como sendo o inteiro k e denotaremos $|B_f| = k$.

Dado $f \in m_n^2$, k -determinado, uma pergunta natural que surge, é a relação entre k e $|B_f|$.

Por Loibel e Tadini ([14]), temos que $|B_f| \leq k+1$.

§ 5. Escada de um Ideal ([7])

Seja $x_1, \dots, x_n$ um sistema de coordenadas nas vizinhanças de $0 \in K^n$.

Dados $(a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n) \in N^n$, diremos que $(a_1, \dots, a_n) < (b_1, \dots, b_n)$, se existir um inteiro $k \in \{1, \dots, n\}$

tal que, $a_n = b_n, \dots, a_{k+1} = b_{k+1}$ e $a_k < b_k$ (ordem Lexicográfica reversa).

Fixado um monômio $h = ax_1^{a_1} \dots x_n^{a_n}$ com $a \neq 0$, definimos a sua ordem como sendo a n -upla $(a_1, \dots, a_n)$. Se $f \in C_0(K^n)$, com $f \notin m_n^\infty$, então definimos a ordem de f como sendo o mínimo das ordens dos monômios de sua série de Taylor em $0 \in K^n$.

Seja $I \subset m_n$ um ideal de $C_0(K^n)$. Definimos a escada de I , como sendo o conjunto $E(I) = \{(a_1, \dots, a_n) \in N^n, \text{ tal que, existe } h \in I, \text{ cuja ordem é } (a_1, \dots, a_n)\}$.

Observemos que a escada de um ideal, não é um invariante diferenciável, como podemos constatar através do exemplo:

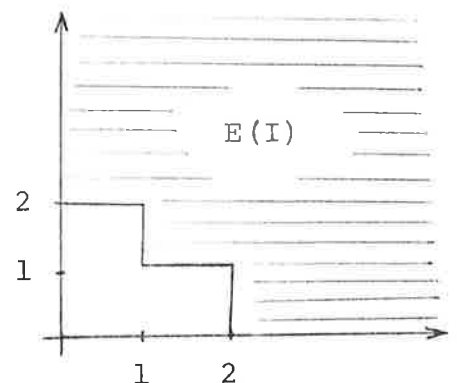
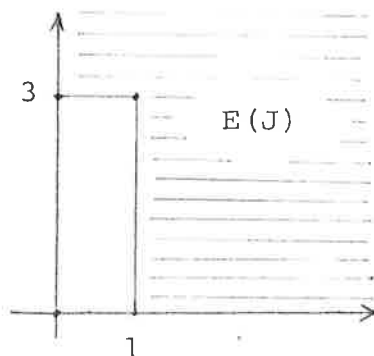
$$I = \langle xy, x^2+y \rangle \subset m_2.$$

A escada de I é dada por:

Tomando a mudança de coordenadas dada por:

$$\psi : \begin{cases} X = x^2+y \\ Y = x \end{cases},$$

temos que neste sistema, I é dado por $\langle X, Y^3 \rangle = J$, cuja escada é:



Uma questão que surge naturalmente, é a existência ou não de algum invariante diferenciável obtido através da escada de um ideal.

Para esta questão, temos respostas surpreendentes em ([7]), dadas através dos dois teoremas abaixo:

5.1. TEOREMA: Seja $I \subset m_n$ um ideal de $C_0(K^n)$.

Então, I contém uma potência de m_n , se e so mente se, a cardinalidade de $N^n - E(I)$ é fini ta, igual $\dim_K \frac{C_0(K^n)}{I}$.

5.2. TEOREMA: Seja $I \subset m_n$ um ideal de $C_0(K^n)$, com

$\dim_K \frac{C_0(K^n)}{I} = \mu < \infty$. Então, considerando

$\psi_1, \dots, \psi_\mu$ monômios em $x_1, \dots, x_n$, tais que, $N^n - E(I) = \{\text{ordem de } \psi_i, i = 1, \dots, \mu\}$, temos que $\psi_1, \dots, \psi_\mu$ são representantes de uma base de $\frac{C_0(K^n)}{I}$ como K -espaço vetorial.

§ 6. Funções Quase-Homogêneas e Semi-Quase-Homogêneas

Uma função $f(x_1, \dots, x_n)$ é dita *quase-homogênea* do tipo $(d; \alpha_1, \dots, \alpha_n)$, se $f(t^{\alpha_1} x_1, \dots, t^{\alpha_n} x_n) = t^d f(x_1, \dots, x_n)$ identicamente para $t \in K - \{0\}$, onde $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ são números racionais positivos.

Uma função $f(x_1, \dots, x_n)$ é dita *semi-quase-homogênea* do tipo $(d; \alpha_1, \dots, \alpha_n)$, se $f = f_0 + f_1$, onde f_0 é quase-homogênea do tipo $(d; \alpha_1, \dots, \alpha_n)$, não-degenerada (isto é, $\mu(f_0) < \infty$), e todos os monômios de f_1 têm grau estrita-

mente maior que d , com relação aos pesos $\alpha_1, \dots, \alpha_n$.

Para a função nula, atribuímos grau ∞ , independentemente dos pesos considerados. Nestas condições, toda função quase-homogênea não-degenerada do tipo $(d; \alpha_1, \dots, \alpha_n)$, é semi-quase-homogênea do tipo $(d; \alpha_1, \dots, \alpha_n)$.

Com relação a estes tipos de funções, temos os seguintes resultados (conforme Arnol'd [1]), enunciados mantendo as notações acima.

6.1. TEOREMA: Seja $f = f_0 + f_1$ uma função semi-quase-homogênea do tipo $(d; \alpha_1, \dots, \alpha_n)$.

Então, $\mu(f) = \mu(f_0)$.

6.2. TEOREMA: Sejam f e g duas funções semi-quase-homogêneas do tipo $(d; \alpha_1, \dots, \alpha_n)$.

Então, $\mu(f) = \mu(g)$.

Observemos que o resultado (6.2), sugere a existência de uma expressão de $\mu(f)$ em termos de $d; \alpha_1, \dots, \alpha_n$. Realmente existe, e é dada pelo:

6.3. TEOREMA: Seja f uma função semi-quase-homogênea do tipo $(d; \alpha_1, \dots, \alpha_n)$.

Então, $\mu(f) = \left(\frac{d-\alpha_1}{\alpha_1}\right) \left(\frac{d-\alpha_2}{\alpha_2}\right) \dots \left(\frac{d-\alpha_n}{\alpha_n}\right)$.

Registremos que Milnor e Orlik ([19]) provaram que

$\left(\frac{d-\alpha_1}{\alpha_1}\right) \left(\frac{d-\alpha_2}{\alpha_2}\right) \dots \left(\frac{d-\alpha_n}{\alpha_n}\right)$ é o posto de um certo grupo abe-

liano livre, e portanto, é um número inteiro positivo.

Sejam $f = f_0 + f_1$ uma função semi-quase-homogênea do tipo $(d; \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ e $\psi_1, \dots, \psi_r$ representantes monomiais de uma C-base de $Q(f)$. Suponhamos que $\psi_1, \dots, \psi_r$ sejam exatamente aqueles que têm grau estritamente maior que d , com relação aos pesos $\alpha_1, \dots, \alpha_n$.

Nestas condições, mantendo as notações, temos o:

6.4. TEOREMA: f admite uma forma normal dada por $f = f_0 + c_1\psi_1 + \dots + c_r\psi_r$, onde $c_1, \dots, c_r \in C$.

§ 7. Modalidade

Sejam M uma variedade diferenciável de dimensão finita e G um grupo de Lie atuando sobre M . Diremos que um ponto $x \in M$, tem *modalidade* m (sob a dada ação), se m for o menor inteiro não negativo, com a seguinte propriedade:

"Existe uma vizinhança suficientemente pequena de x em M , coberta por um número finito de famílias contínuas de órbitas, dependendo de no máximo m -parâmetros, e, toda vizinhança de x em M , intercepta alguma família de órbitas com m -parâmetros."

Conforme Arnol'd ([2]), podemos ter uma vizinhança de um ponto $x \in M$, coberta por uma família enumerável infinita de órbitas. No caso algébrico, isto é, M uma variedade algébrica e G um grupo algébrico de transformações sobre M , tal fato não pode ocorrer.

Dois germes $f : K^n, 0 \rightarrow K, 0$ e $g : K^m, 0 \rightarrow K, 0$ são ditos *estavelmente equivalentes* se, a menos de adições de formas quadráticas não degeneradas em outras variáveis, forem equivalentes.

Por exemplo, temos que $f(x) = x^3$ e $g(x, y) = x^3 + y^2$ são estavelmente equivalentes.

Seja $\tilde{R}^k$, o grupo dos k -jatos de elementos de $\tilde{R}$. Dado $f \in m_n^2 \subset C_0(C^n)$, diremos que f tem *modalidade* m , se para k suficientemente grande, $j^k f(0)$ tem modalidade m , como elemento de $\tilde{J}^k(n, 1)$, sob a ação de $\tilde{R}^k$. (Para o caso real, a definição é análoga).

Por Arnol'd, ([5]), temos que a modalidade é invariante por equivalência estável.

Em ([8]), Gabriélov diz que um germe $f \in m_n^2 \subset C_0(C^n)$ com $\mu(f) < \infty$ tem *modalidade própria* m , se, dada uma deformação versal $F(x, \lambda)$ de f , a dimensão no espaço de parâmetros λ , do germe de conjuntos definido por $\{\lambda : \mu(F(\cdot, \lambda)) = \mu(f)\}$, for m . Neste mesmo trabalho, Gabriélov provou a equivalência entre modalidade e modalidade própria.

Em ([2]), Arnol'd deu uma classificação das singularidades 0-modais, através do:

7.1. TEOREMA: A menos de equivalência estável, todo germe 0-modal $f : C^n, 0 \rightarrow C, 0$, com $f \in m_n^2$, é dado por:

$$A_k : x^{k+1}, \quad k \geq 1$$

$$D_k : x^2 y + y^{k-1}, \quad k \geq 4$$

$$E_6 : x^3 + y^4$$

$$E_7 : x^3 + xy^3$$

$$E_8 : x^3 + y^5$$

Observemos que (7.1) também é verdadeiro para o caso real, desdobrando $D_k : x^2y \pm y^{k-1}$ se k ímpar e $E_6 : x^3 \pm y^4$.

Em ([3] e [4]), Arnol'd classifica as singularidades 1 e 2 modais de germes $f : \mathbb{C}^{n,0} \rightarrow \mathbb{C}, 0$, com $f \in m_n^2$. Segundo Arnol'd, as classificações são análogas para o caso real.

Sejam $f(x_1, \dots, x_n)$ uma função semi-quase-homogênea do tipo $(d; \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ e $\psi_1, \dots, \psi_\mu$ representantes monomiais de uma $\mathbb{C}$ -base de $Q(f)$. Suponhamos que $\psi_1, \dots, \psi_r$ são exatamente aqueles que têm pesos maior ou igual a d . Nestas condições, é dito que f tem *modalidade interna* r (este número independe do conjunto de representantes monomiais para uma $\mathbb{C}$ -base de $Q(f)$).

Em ([1]), Arnol'd provou que a modalidade é maior ou igual à modalidade interna, para o caso de uma função semi-quase-homogênea.

Em ([9]), Kushnirenko e Gabriélov, provaram que tais conceitos coincidem para o caso de f homogênea. Arnol'd ([5]), acha bastante provável que tal fato seja verdadeiro para o caso semi-quase-homogêneo.

Recentemente ([24]) foi dada uma classificação para as singularidades com modalidade interna 3 e 4. Lembremos que as singularidades com modalidade interna 0, 1, 2 estão contidas nas listas de Arnol'd das singularidades com modalidade 0, 1, 2.

CAPÍTULO II

(r,k) -DETERMINAÇÃO

§ 1. Caracterização da (r,k) -Determinação

Em (I - § 3), temos a definição de determinação forte, introduzida por Siersma. Vamos agora dar algumas definições, afim de podermos dar algumas respostas às questões surgidas, como veremos adiante.

1.1. DEFINIÇÃO: Dois germes $f, g \in C_0(\mathbb{R}^n)$ são ditos r -equivalentes, onde r é um inteiro não negativo, se existir um germe de difeomorfismo C^∞
 $\psi : \mathbb{R}^n, 0 \rightarrow \mathbb{R}^n, 0$, com $j^r \psi(0) = j^r I_d(0)$ e
 $f \circ \psi = g$.

1.2. DEFINIÇÃO: Dados $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$ e $(r,k) \in \mathbb{N}^2$ com $0 \leq r \leq k$, diremos que f é (r,k) -determinado se, para todo $g \in C_0(\mathbb{R}^n)$ com $j^k f(0) = j^k g(0)$, tivermos f e g r -equivalentes.

1.3. OBSERVAÇÕES: A $(1,k)$ -determinação coincide com a determinação forte e a $(0,k)$ -determinação, coincide com o conceito usual de determinação finita.

O Teorema (I - 3.2) dá uma condição necessária e suficiente para a $(1,k)$ -determinação. Um dos nossos objetivos neste capítulo, é dar uma condição necessária e suficiente para a

(r,k) -determinação, $1 \leq r \leq k$. A demonstração, segue técnicas análogas às empregadas por Siersma quando da caracterização da $(1,k)$ -determinação.

1.4. TEOREMA: Sejam $f \in m_n \subset C_0(R^n)$ e $1 \leq r \leq k$ inteiros. Se $m_n^{k+1} \subset m_n^{r+1} \langle \partial f \rangle + m_n^{k+2}$, então f é (r,k) -determinado.

Demonstração: Seja $g \in m_n$, tal que, $j^k g(0) = j^k f(0)$. Isto equivale a $f-g \in m_n^{k+1}$. Definamos

$F : R^n \times R, 0 \times R \rightarrow R$ por $F(x,t) = f(x) + t(g(x)-f(x))$ e $F_t(x) = F(x,t)$. Logo, $F_0 = f$ e $F_1 = g$.

Seja $\partial_x F = (\partial_1 F, \dots, \partial_n F)$ onde $\partial_i F = \frac{\partial F}{\partial x_i}$, $i = 1, \dots, n$, e, $x_1, \dots, x_n$ é um sistema de coordenadas nas vizinhanças de $0 \in R^n$.

Mostremos inicialmente que, fixado $t_0 \in R$, existe $p : V \subset R^n \times R \rightarrow R^n$, onde V é um aberto do $R^n \times R$ contendo $(0, t_0)$, tal que:

- (i) $p(0,t) = 0$, para todo $(0,t) \in V$;
- (ii) $d_x^s p(0,t) = 0$, para todo $(0,t) \in V$ e $1 \leq s \leq r$, e,
- (iii) $\partial_1 F(x,t)p_1(x,t) + \dots + \partial_n F(x,t)p_n(x,t) = f(x) - g(x)$, para todo $(x,t) \in V$, onde $p = (p_1, \dots, p_n)$.

Para tal, consideremos $C_{0 \times t_0}(R^{n+1})$ o anel dos germes de aplicações C^∞ do $R^n \times R$ em R , com fonte $(0, t_0)$. Seja m_{n+1, t_0} seu único ideal maximal. Temos portanto as inclusões naturais $C_0(R^n) \subset C_{0 \times t_0}(R^{n+1})$ e $m_n \subset m_{n+1, t_0}$.

De $F(x, t) = f(x) + t(g(x) - f(x))$, segue que $\partial_i F = \partial_i f + t(\partial_i g - \partial_i f)$, e então, $\partial_i f = \partial_i F + t\partial_i(f - g)$, $i=1, \dots, n$.

Seja $J_F = \langle \partial_1 F, \dots, \partial_n F \rangle \cdot C_{O \times t_0}(R^{n+1})$. Como $f - g \in m_n^{k+1}$, então, $\partial_i(f - g) \in m_n^k$ e portanto, $t\partial_i(f - g) \in C_{O \times t_0}(R^{n+1})m_n^k$, $i = 1, \dots, n$.

Logo, $\langle \partial f \rangle = \langle \partial_1 f, \dots, \partial_n f \rangle \subset J_F + C_{O \times t_0}(R^{n+1})m_n^k$.

Como por hipótese temos $m_n^{k+1} \subset m_n^{r+1}\langle \partial f \rangle + m_n^{k+2}$, segue que $C_{O \times t_0}(R^{n+1})m_n^{k+1} \subset m_n^{r+1}\langle \partial f \rangle \cdot C_{O \times t_0}(R^{n+1}) + m_n^{k+2}C_{O \times t_0}(R^{n+1})$.

Desde que $\langle \partial f \rangle \subset J_F + C_{O \times t_0}(R^{n+1})m_n^k$, temos $C_{O \times t_0}(R^{n+1})m_n^{k+1} \subset m_n^{r+1}J_F + m_n^{k+2}C_{O \times t_0}(R^{n+1}) + m_n^{k+r+1}C_{O \times t_0}(R^{n+1})$.

Sendo $r \geq 1$, segue que

$$C_{O \times t_0}(R^{n+1})m_n^{k+1} \subset m_n^{r+1}J_F + m_n^{k+2}C_{O \times t_0}(R^{n+1}).$$

Devido à inclusão natural $m_n \subset m_{n+1, t_0}$, segue que

$$C_{O \times t_0}(R^{n+1})m_n^{k+1} \subset m_n^{r+1}J_F + m_{n+1, t_0}(C_{O \times t_0}(R^{n+1})m_n^{k+1}).$$

Pelo Lema de Nakayama ([17]), segue que

$C_{O \times t_0}(R^{n+1})m_n^{k+1} \subset m_n^{r+1}J_F$. De $m_n^{k+1} \subset C_{O \times t_0}(R^{n+1})m_n^{k+1}$, temos $m_n^{k+1} \subset m_n^{r+1}J_F$.

Como $f - g \in m_n^{k+1}$, segue que existem $p_1, \dots, p_n \in C_{O \times t_0}(R^{n+1})m_n^{r+1}$, tais que, $f - g = \partial_1 F p_1 + \dots + \partial_n F p_n$.

Logo, tomando $p = (p_1, \dots, p_n)$, segue que existe um aberto V do $R^n \times R$, com $(0, t_0) \in V$, tal que:

- (i) $p(0,t) = 0$, para todo $(0,t) \in V$;
- (ii) $d_x^s p(0,t) = 0$, para todo $(0,t) \in V$ e $1 \leq s \leq r$, e,
- (iii) $\partial_1 F(x,t)p_1(x,t) + \dots + \partial_n F(x,t)p_n(x,t) = f(x) - g(x)$,
para todo $(x,t) \in V$.

Antes de prosseguirmos com a demonstração, usaremos $t \sim t_0$, para simbolizar " t suficientemente próximo de t_0 ". Consideremos agora a seguinte equação diferencial:

$$(*) \begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t}(x,t) = p(h(x,t),t) \\ h(x,t_0) = x \end{cases}$$

Pondo $h_t(x) = h(x,t)$, temos que $h_{t_0} = \text{identidade}$. Logo, h_t é germe de difeomorfismo C^∞ em $0 \in \mathbb{R}^n$, para $t \sim t_0$.

Observemos que para $x = 0$, $h(0,t) \equiv 0$ é solução do sistema (*), uma vez que, $p_1, \dots, p_n \in C_{0 \times t_0}(\mathbb{R}^{n+1})_{m_n^{r+1}}$. Logo, $h_t(0) = 0$, para $t \sim t_0$.

Tomemos $\gamma(t) = F_t \circ h_t$. Então, $\gamma(t)(x) = F(h(x,t),t)$.

Portanto,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\gamma(t)(x)) &= \frac{d}{dt}(F_t(h_t(x))) = \partial_1 F(h(x,t),t) \frac{\partial h_1}{\partial t}(x,t) + \\ &+ \dots + \partial_n F(h(x,t),t) \frac{\partial h_n}{\partial t}(x,t) + g(h(x,t)) - f(h(x,t)), \end{aligned}$$

onde $h = (h_1, \dots, h_n)$.

Por (*) temos que:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} F_t(h_t(x)) &= \partial_1 F(h_t(x), t) p_1(h_t(x), t) + \dots + \\ &+ \dots + \partial_n F(h_t(x), t) p_n(h_t(x), t) + g(h_t(x)) - f(h_t(x)). \end{aligned}$$

Sendo h_t germes de difeomorfismos C^∞ em $0 \in \mathbb{R}^n$, com $h_t(0) = 0$, para $t \sim t_0$, segue por (iii) que $\frac{d}{dt} F_t(h_t(x)) \equiv 0$ como germes em $(0, t_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$.

Pela conexão da reta, segue $\gamma(t)$ é constante para $t \sim t_0$. Logo, $F_{t_0} = F_{t_0} \circ h_{t_0} = F_t \circ h_t$, para $t \sim t_0$.

Mostremos agora que $j^r h_t(0) = j^r I_d(0)$, para $t \sim t_0$.

Como $h_t(x) = h(x, t)$ é solução do sistema (*), isto é, $\frac{\partial h}{\partial t}(x, t) = p(h(x, t), t)$ e $h(x, t_0) = x$, nas vizinhanças de $(0, t_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, segue que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial h}{\partial t}(x, t) &= \frac{\partial}{\partial x_i} p(h(x, t), t) = \frac{\partial}{\partial x_i} (p_1(h(x, t), t), \dots, \\ &\dots, p_n(h(x, t), t)) = \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial p_1}{\partial y_j}(h(x, t), t) \frac{\partial h_j}{\partial x_i}(x, t), \dots, \right. \\ &\left. \dots, \sum_{j=1}^n \frac{\partial p_n}{\partial y_j}(h(x, t), t) \frac{\partial h_j}{\partial x_i}(x, t) \right). \end{aligned}$$

Seja $1 \leq u \leq n$.

Então, $\frac{\partial}{\partial x_i} p_u(h(x, t), t) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial p_u}{\partial y_j}(h(x, t), t) \frac{\partial h_j}{\partial x_i}(x, t)$.
Portanto, $\frac{\partial}{\partial x_i} p_u(h(x, t), t)|_{x=0} = 0$ pois, $p_u \in C_{0 \times t_0}^{(R^{n+1})^m_n^{r+1}}$
e $h_t(0) = 0$ para $t \sim t_0$ ($r \geq 1$).

Pela mesma razão, $\frac{\partial^s}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_s}} p_u(h(x, t), t)|_{x=0} = 0$
se $1 \leq s \leq r$ e $t \sim t_0$.

Logo, por (*) temos que,

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial^s}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_s}} p(h(x,t), t) \Big|_{x=0} = \\
&= \frac{\partial^s}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_s}} \cdot \frac{\partial}{\partial t} h(x,t) \Big|_{x=0} = \\
&= \frac{\partial}{\partial t} \cdot \frac{\partial^s}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_s}} h(x,t) \Big|_{x=0} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^s}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_s}} h(x,t) \right) \Big|_{x=0}
\end{aligned}$$

se $1 \leq s \leq r$ e $t \sim t_0$.

Portanto, $\frac{\partial}{\partial t} d^s h_t(0) = 0$ se $1 \leq s \leq r$ e $t \sim t_0$. Dis-
to segue que $d^s h_{t_0}(0) = d^s h_t(0)$ se $1 \leq s \leq r$ e $t \sim t_0$.

Se $s = 1$, como $h_{t_0} = I_d$, temos que $dh_t(0) = I_d$ pa-
ra $t \sim t_0$.

Se $2 \leq s \leq r$, como $h_{t_0} = I_d$, segue que $d^s h_t(0) = 0$
para $t \sim t_0$.

Concluimos pois, que F_{t_0} é equivalente a F_t através
da família de germes de difeomorfismos $\{h_t\}$, com a proprieda-
de $j^r h_t(0) = j^r I_d(0)$, se $t \sim t_0$.

Pela conexão e compacidade de $[0,1]$, segue que $F_0 = f$
e $F_1 = g$ são r -equivalentes.

Vale a recíproca.

1.5. TEOREMA: Se $f \in m_n \subset C_0(R^n)$ é (r,k) -determinado, então,
 $m_n^{k+1} \subset m_n^{r+1} \langle \partial f \rangle + m_n^{k+2}$.

Demonstração: Consideremos os seguintes conjuntos:

$$M = \{g \in C_0(R^n) : j^k g(0) = j^k f(0)\} \text{ e}$$

$$N = \{g \in C_0(R^n) : g \text{ é } r\text{-equivalente a } f\}.$$

Tomemos a projeção natural $\pi_{k+1} : C_0(R^n) \rightarrow J^{k+1}(n,1)$.

Sejam $M_{k+1} = \pi_{k+1}^* M$ e $N_{k+1} = \pi_{k+1}^* N$. Consideremos R_r^{k+1} o grupo dos $(k+1)$ -jatos de germes de difeomorfismos C^∞ $\psi : R^n, 0 \rightarrow R^n, 0$, com $j^r \psi(0) = j^r I_d(0)$.

Por Mather ([17]), temos que R_r^{k+1} é um grupo de Lie (R_r^{k+1} é um grupo algébrico), portanto, as R_r^{k+1} -órbitas em $J^{k+1}(n,1)$ são subvariedades imersas de $J^{k+1}(n,1)$ (sendo R_r^{k+1} algébrico, as R_r^{k+1} -órbitas em $J^k(n,1)$, são subvariedades mergulhadas de $J^{k+1}(n,1)$).

Pela definição de M , temos que $M_{k+1} = j^{k+1}f(0) + H_{k+1}(n,1)$, onde $H_{k+1}(n,1)$ é o R -espaço vetorial das $(k+1)$ -formas homogêneas reais em n indeterminadas.

Como f é (r,k) -determinado, segue que $M \subset N$. Portanto, $M_{k+1} \subset N_{k+1}$. Sendo $M_{k+1} = j^{k+1}f(0) + H_{k+1}(n,1)$ e $N_{k+1} = R_r^{k+1} j^{k+1}f(0)$, segue que $H_{k+1}(n,1) = T_z M_{k+1} \subset T_z N_{k+1}$, onde $z = j^{k+1}f(0)$.

Mostremos que $T_z N_{k+1} = m_n^{r+1} \langle \partial f \rangle$ módulo m_n^{k+2} .

Para tal, sejam $v \in T_z N_{k+1}$ e $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow N_{k+1}$, uma curva diferenciável, com $\gamma(0) = z$ e $\gamma'(0) = v$.

Sendo $N_{k+1} = R_r^{k+1} z$, existe $h_t \in R_r$ (grupo dos germes de difeomorfismos C^∞ $\psi : R^n, 0 \rightarrow R^n, 0$ com $j^r \psi(0) = j^r I_d(0)$, tal que, $\gamma(t) = \pi_{k+1}(f \circ h_t)$ (D. Rand [21]).

Portanto, $v = \gamma'(0) = \frac{d}{dt} \pi_{k+1}(f \circ h_t) \Big|_{t=0} = \pi_{k+1} \left[\frac{d}{dt} (f \circ h_t) \Big|_{t=0} \right]$.

Por outro lado,

$$\frac{d}{dt} (f \circ h_t) \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} f(h(x,t)) \Big|_{t=0} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial y_j}(h(x,0)) \frac{\partial h_j}{\partial t}(x,0),$$

onde $h_t(x) = h(x,t) = (h_1(x,t), \dots, h_n(x,t))$.

Como $j^{k+1}f(0) = z = \gamma(0) = j^{k+1}(f \circ h_0)(0)$ e $h_t \in R_r$, segue que $\frac{d}{dt}(f \circ h_t)|_{t=0} \in \langle \partial f \rangle \cdot \mathcal{C}_0(R^n)$ módulo m_n^{k+2} .

Denotemos $\frac{\partial h_j}{\partial t}(x, 0) = p_j(x)$, $j = 1, \dots, n$ e $p = (p_1, \dots, p_n)$. Logo, $\frac{\partial}{\partial t}h_t(x)|_{t=0} = p(x)$.

Tomando $1 \leq s \leq r$, temos

$$\begin{aligned} d_x^s p(x)|_{x=0} &= d_x^s \left[\frac{\partial}{\partial t} h_t(x) \right]_{t=0} \Big|_{x=0} = \\ &= \frac{\partial}{\partial t} [d_x^s h_t(x)|_{x=0}]_{t=0} = 0, \end{aligned}$$

pois $h_t \in R_r$.

Temos ainda $p(0) = \frac{\partial}{\partial t} h_t(0)|_{t=0} = 0$, pois $h_t \in R_r$.

Nestas condições, $p_1, \dots, p_n \in m_n^{r+1}$. Portanto,

$$\frac{d}{dt}(f \circ h_t)|_{t=0} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial y_j}(h(x, 0)) p_j(x) \in m_n^{r+1} \langle \partial f \rangle \text{ módulo } m_n^{k+2}.$$

Como $v = \pi_{k+1} \left[\frac{d}{dt}(f \circ h_t)|_{t=0} \right]$, segue que $T_z N_{k+1} \subset m_n^{r+1} \langle \partial f \rangle$ módulo m_n^{k+2} .

Seja $\alpha(x) \in m_n^{r+1} \langle \partial f \rangle$ módulo m_n^{k+2} . Logo,

$$\alpha(x) = \sum_{i=1}^n \partial_i f(x) p_i(x) \quad \text{com } p_1, \dots, p_n \in m_n^{r+1}.$$

Tomemos $h_t(x) = x + tp(x)$ onde $p = (p_1, \dots, p_n)$. Sendo $h_0 = I_d$, temos que h_t é germe de difeomorfismo $\mathcal{C}^\infty$, $h_t : R^{n,0} \rightarrow R^{n,0}$ para $t \sim 0$, pois $p(0) = 0$.

De $p_1, \dots, p_n \in m_n^{r+1}$, segue que $j^r h_t(0) = j^r I_d(0)$ e portanto, $h_t \in R_r$ se $t \sim 0$.

Definindo $\lambda(t) = \pi_{k+1}(f \circ h_t)$ para $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, com $\varepsilon > 0$ e suficientemente pequeno, segue que $\lambda(t) \in R_r^{k+1} z = N_{k+1}$, com $\lambda(0) = z$ e $\lambda'(0) = \pi_{k+1} \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) p_j(x) \right)$.

Logo, $\lambda'(0) = \pi_{k+1}(\alpha(x)) \in T_{\mathbb{Z}N_{k+1}}$. Disto segue que $m_n^{r+1} \langle \partial f \rangle$ módulo $m_n^{k+2} \subset T_{\mathbb{Z}N_{k+1}}$.

Portanto, $T_{\mathbb{Z}N_{k+1}} = m_n^{r+1} \langle \partial f \rangle$ módulo m_n^{k+2} .

Desde que, $H_{k+1}(n,1) = T_{\mathbb{Z}M_{k+1}} \subset T_{\mathbb{Z}N_{k+1}}$, segue que $m_n^{k+1} \subset m_n^{r+1} \langle \partial f \rangle + m_n^{k+2}$.

Vejamos agora alguns corolários de (1.4) e (1.5):

1.6. COROLÁRIO: Sejam $f \in m_n \subset C_0(\mathbb{R}^n)$ e $s \in \mathbb{Z}$, $s > 0$.

Se f é (r,k) -determinado, então f é $(r+s, k+s)$ -determinado.

Demonstração: Sendo f (r,k) -determinado, então, $m_n^{k+1} \subset m_n^{r+1} \langle \partial f \rangle$. Disto segue que $m_n^{k+s+1} \subset m_n^{r+s+1} \langle \partial f \rangle$. Sendo $r+s > 0$, temos que f é $(r+s, k+s)$ -determinado.

1.7. COROLÁRIO: Sejam $f, g \in m_n \subset C_0(\mathbb{R}^n)$ germes de funções de Morse.

Se para algum $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 2$, $j^k f(0) = j^k g(0)$, então, f e g são $(k-1)$ -equivalentes.

Demonstração: Sendo f um germe de função de Morse, então $\langle \partial f \rangle = m_n$. Portanto, $m_n^{k+1} = m_n^{(k-1)+1} \langle \partial f \rangle$. Como $k \geq 2$, segue que f é $(k-1, k)$ -determinado. Pelo fato de termos $j^k f(0) = j^k g(0)$, segue a $(k-1)$ -equivalência de f e g .

1.8. COROLÁRIO: Seja $h_a(x_1, \dots, x_n)$ uma forma homogênea real do grau $a \geq 2$, com $\mu(h_a) < \infty$ e $n \geq 2$.

Tem-se:

- (i) se $a = 2$, f é $(1,2)$ -determinado;
- (ii) se $a = 3$, f é $(n-1, n+1)$ -determinado;
- (iii) se $a \geq 4$, f é (r, k) -determinado, onde $r = (n-1)(a-2)-1$ e $k = n(a-2)$. Além disso, h_a não é $[n(a-2)-1]$ -determinado.

Demonstração:

(i): imediato.

Provemos (ii) e (iii).

Sendo h_a uma forma homogênea do grau $a \geq 3$, com $\mu(h_a) < \infty$, segue que h_a é semi-quase-homogênea do tipo $(1; \frac{1}{a}, \dots, \frac{1}{a})$. Por Arnol'd ([1]), temos que em qualquer base monomial de $Q(h_a)$, existe exatamente um monômio básico com grau $d_{\max} = n(1 - \frac{2}{a})$ e que, todo monômio com grau maior que $d_{\max}$ (com relação aos pesos $(\frac{1}{a}, \dots, \frac{1}{a})$) está em $\langle \partial h_a \rangle$.

Como $d_{\max} = n(1 - \frac{2}{a}) = \frac{1}{a}[n(a-2)]$, segue que

$m_n^{n(a-2)+1} \subset \langle \partial h_a \rangle$. Pelo fato de serem $\partial_1 h_a, \dots, \partial_n h_a$ homogêneos do grau $a-1$ (com relação aos pesos $(1, \dots, 1)$), segue que $m_n^{n(a-2)+1} \subset m_n^{(n-1)(a-2)} \langle \partial h_a \rangle$.

Se $a = 3$, então $m_n^{n+1} \subset m_n^{n-1} \langle \partial f_a \rangle$. Disto segue que $m_n^{n+2} \subset m_n^n \langle \partial h_a \rangle$. Como $n \geq 2$, temos que h_3 é $(n-1, n+1)$ -determinado. Observemos que podemos melhorar o grau de determinação, dependendo de n , isto é, para $n \geq 3$, h_3 é $(n-2, n)$ -determinado.

Se $a \geq 4$, então $m_n^{n(a-2)+1} \subset m_n^{(n-1)(a-2)} \langle \partial h_a \rangle$ implica que h_a é $((n-1)(a-2)-1, n(a-2))$ -determinado.

Se $m_n^{n(a-2)} \subset \langle \partial h_a \rangle$, então por (I - 5.2) segue que existe uma base monomial de $Q(h_a)$, cujo grau de cada monômio com relação aos pesos $(\frac{1}{a}, \dots, \frac{1}{a})$ é estritamente menor que $d_{\max} = n(1 - \frac{2}{a})$, o que é um absurdo. Logo, h_a ($a \geq 4$) não é $[n(a-2)-1]$ -determinado.

1.9. OBSERVAÇÕES: Para $n = 2$, (iii) poderia ser provado por outras vias como segue: sendo $\mu(h_a) < \infty$, segue por Kuo ([11]) que $\partial_1 h_a$ e $\partial_2 h_a$ são primos entre si. Sendo $\partial_1 h_a$ e $\partial_2 h_a$ homogêneos do grau $a-1$, primos entre si, segue por Lu ([15]) que $m_2^{2a-3} \subset \langle \partial h_a \rangle$. Pela homogeneidade de $\partial_1 h_a$ e $\partial_2 h_a$, temos que $m_2^{2a-3} \subset m_2^{a-2} \langle \partial h_a \rangle$, acarretando a $(a-3, 2a-4)$ -determinação de h_a ($a \geq 4$). Como $\dim_R \pi_{2a-4}(m_2^{a-3} \langle \partial_1 h_a, \partial_2 h_a \rangle) \leq 2a-4 < 2a-3 = \dim_R H_{2a-4}(2,1)$, segue que h_a não é $(2a-5)$ -determinado.

De uma maneira mais geral, temos o:

1.10. COROLÁRIO: Seja $f \in m_n \subset C_0(R^n)$, tal que, $f(x_1, \dots, x_n) = f_{a_1}(x_1, \dots, x_{r_1}) + f_{a_2}(x_{r_1+1}, \dots, x_{r_1+r_2}) + \dots + f_{a_k}(x_{r_{k-1}+1}, \dots, x_{r_{k-1}+r_k})$, com $r_{k-1}+r_k = n$, $\mu(f) < \infty$, $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{Z}$, $3 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_k$ e f_{a_i} homogênea do grau a_i ($i = 1, \dots, k$; $n \geq 2$). Então, f é (r, s) -determinado, se $a_1 \geq 4$ e $(r+1, s+1)$ -determinado, se $a_1 = 3$, onde:

$$r = r_1(a_1-2) + r_2(a_2-2) + \dots + r_{k-1}(a_{k-1}-2) + \\ + (r_k-1)(a_k-1) - r_k \quad e$$

$$s = r_1(a_1-2) + r_2(a_2-2) + \dots + r_k(a_k-2)$$

Demonstração: Se f e g são dois germes semi-quase-homogêneos do mesmo tipo $(d; \alpha_1, \dots, \alpha_n)$, então, considerando B e B' duas bases monomiais de $Q(f)$ e $Q(g)$ respectivamente, e, $i \in Q$, então o número de monômios de B com grau i , é exatamente igual ao número de monômios de B' com grau i , com relação aos pesos $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, conforme ([1]). Logo, considerando $g(x_1, \dots, x_n) = x_1^{a_1} + \dots + x_{r_1}^{a_1} + x_{r_1+1}^{a_2} + \dots + x_{r_1+r_2}^{a_2} + \dots + x_{r_{k-1}+1}^{a_k} + \dots + x_{r_{k-1}+r_k}^{a_k}$, com $r_{k-1}+r_k = n$, temos que f e g são semi-quase-homogêneos do mesmo tipo $(1; \frac{1}{a_1}, \dots, \frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \dots, \frac{1}{a_2}, \dots, \frac{1}{a_k}, \dots, \frac{1}{a_k})$.

$$\text{Portanto, } d_{\max} = \frac{1}{a_1}[r_1(a_1-2)] + \dots + \frac{1}{a_k}[r_k(a_k-2)].$$

Combinando este fato, com (I - 5.2), temos o resultado, e além disso, segue que f não é $(s-1)$ -determinado ($a_1 \geq 4$).

J. Martinet ([16]) demonstra a seguinte proposição, que é uma consequência imediata de (I - 3.2):

"Sejam $f, g \in m_n \subset C_0(R^n)$ com $m_n^{k+1} \subset m_n^2 \langle \partial f \rangle$.

Se $f-g \in m_n^{k+1}$, então f e g são equivalentes."

Para uma resposta mais geral, temos o:

1.11. COROLÁRIO: Sejam $f, g \in m_n \subset C_0(R^n)$, com $m_n^{k+1} \subset m_n^{r+1} \langle \partial f \rangle$ e $r \geq 1$.
Se $f-g \in m_n^{k+1}$, então f e g são r -equivalentes.

§ 2. *Perturbações em m_n de Germes Finitamente Determinados*

Sejam $f, g \in m_2 \subset C_0(R^2)$, tais que, $f(x, y) = x^2y + y^3$ e $g(x, y) = y^2$. Consideremos $f_t(x, y) = x^2y + y^3 + ty^2$.

Temos que f_0 é 3-determinado, pois, $m_2^4 \subset m_2^2 \langle \partial f_0 \rangle$.

Mostremos que f_t não é 3-determinado para $t \neq 0$.

Usando técnicas de ([2]), temos:

$$\frac{\partial}{\partial y} f_t = 0 \iff x^2 + 3y^2 + 2ty = 0 \implies y = y(x) = -\frac{1}{2t}x^2 + o(x^4),$$

se $t \neq 0$.

$$\text{Logo, } f_t(x, y(x)) = x^2 \left(-\frac{1}{2t}x^2 + o(x^4) \right) + t \left(-\frac{1}{4t^2}x^4 + o(x^6) \right) + o(x^6) = -\frac{1}{4t}x^4 + o(x^6).$$

Portanto, f_t é equivalente a $x^2 \pm y^4$, conforme $t < 0$ ou $t > 0$. Disto segue que f_t é 4-determinado mas não 3-determinado ($t \neq 0$).

Em vista deste exemplo, vamos propor o seguinte problema:

"Seja $f \in m_n \subset C_0(R^n)$ k -determinado e seja $\psi \in m_n^\alpha$ com $\alpha \in \mathbb{Z}$, $\alpha \geq 1$. Considerando $f_t = f + t\psi$, qual o menor α de um modo geral, tal que, f_t é k -determinado para $t \sim 0$?"

Para dar uma resposta a esta questão, demonstremos a seguinte:

2.1. PROPOSIÇÃO: Seja $f \in m_n \subset C_0(R^n)$ (r,k) -determinado, com $1 \leq r \leq k$.

Sejam $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_s) \in R^S$ e $\psi_\lambda \in C_0(R^n)$ uma família de germes a s -parâmetros, com $\psi_\lambda \in m_n^{k-r+1}$, $\lambda \in U$, onde U é um aberto de R^S contendo 0 .

Então, definindo $f_\lambda = f + \psi_\lambda$, tem-se f_λ (r,k) -determinado se λ pertencer a uma bola de centro em $0 \in R^S$ e raio suficientemente pequeno.

Demonstração: Sendo f (r,k) -determinado, então temos $m_n^{k+1} \subset m_n^{r+1} \langle \partial f \rangle$. Sejam $p_1, \dots, p_t$ R -geradores de $H_{k+1}(n,1)$ (R -espaço vetorial das formas homogêneas reais de grau $k+1$ em n indeterminadas). Denotemos $H_{k+1}(n,1) = \langle p_1, \dots, p_t \rangle_R$.

Logo, para $1 \leq j \leq t$, temos $p_j = \sum_{i=1}^n \alpha_{ij} \partial_i f$ módulo m_n^{k+2} , onde $\alpha_{ij} \in m_n^{r+1}$.

Tomemos $\bar{p}_j = \sum_{i=1}^n \alpha_{ij} (\partial_i f + \partial_i \psi_\lambda) = \sum_{i=1}^n \alpha_{ij} \partial_i f + \sum_{i=1}^n \alpha_{ij} \partial_i \psi_\lambda$, $j = 1, 2, \dots, t$.

Como $\psi_\lambda \in m_n^{k-r+1}$ e $\alpha_{ij} \in m_n^{r+1}$, segue que $\sum_{i=1}^n \alpha_{ij} \partial_i \psi_\lambda \in m_n^{k+1}$, para todo $j = 1, \dots, t$ e $\lambda \in U$.

Nestas condições, $j^{k+1} \bar{p}_j(0) = p_j + j^{k+1} (\sum_{i=1}^n \alpha_{ij} \partial_i \psi_\lambda)(0)$, $j = 1, \dots, t$. Como $H_{k+1}(n,1) = \langle p_1, \dots, p_t \rangle_R$, segue que existe uma bola aberta $B(0, \varepsilon) \subset U$, de centro $0 \in R^S$ e raio

$\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, tal que,

$$H_{k+1}(n,1) = \langle j^{k+1} \bar{p}_1(0), \dots, j^{k+1} \bar{p}_t(0) \rangle_R.$$

Portanto, $H_{k+1}(n,1) \subset m_n^{r+1} \langle \partial f_\lambda \rangle$ módulo m_n^{k+2} , para $\lambda \in B(0, \varepsilon)$.

Logo, $m_n^{k+1} \subset m_n^{r+1} \langle \partial f \rangle + m_n^{k+2}$, se $\lambda \in B(0, \varepsilon)$.

Como $r \geq 1$, segue que f_λ é (r, k) -determinado para $\lambda \in B(0, \varepsilon)$.

2.2. OBSERVAÇÕES: Como podemos observar na demonstração da proposição acima, as condições impostas a λ em ψ_λ , são importantes para a parte homogênea de grau $k-r+1$ de ψ_λ . Como caso particular disto temos o:

2.3. COROLÁRIO: Seja $f(x_1, \dots, x_n)$ uma forma homogênea real do grau $a \geq 4$, em $x_1, \dots, x_n$ com $n \geq 2$ e $\mu(f) < \infty$. Seja $\psi_\lambda = h_\lambda + \psi$ uma família de germes a s -parâmetros $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_s) \in \mathbb{R}^s$, $\lambda \in U$ um aberto do $\mathbb{R}^s$ contendo 0 , com $h_\lambda \in H_a(n,1)$ e $\psi \in m_n^{a+1}$.

Então, existe uma bola aberta $B(0, \varepsilon) \subset U$, com centro em $0 \in \mathbb{R}^s$ e raio $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, tal que $f + \psi_\lambda$ é $((n-1)(a-2)-1, n(a-2))$ -determinado se $\lambda \in B(0, \varepsilon)$.

Demonstração: Por (1.8), temos que f é $((n-1)(a-2)-1, n(a-2))$ -determinado e portanto, $m_n^{n(a-2)+1} \subset m_n^{(n-1)(a-2)} \langle \partial f \rangle$.

Como $[n(a-2)+1] - [(n-1)(a-2)] + 1 = a$, $h_\lambda \in H_a(n,1)$ e $\psi \in m_n^{a+1}$, então, o resultado segue para $f_\lambda = f + \psi_\lambda$, onde $\psi_\lambda = h_\lambda + \psi$.

De um modo mais geral, temos o:

2.4. COROLÁRIO: Seja $f(x_1, \dots, x_n) = f_{a_1}(x_1, \dots, x_{r_1}) +$
 $+ f_{a_2}(x_{r_1+1}, \dots, x_{r_1+r_2}) + \dots + f_{a_k}(x_{r_{k-1}+1}, \dots, x_n)$
 com $\mu(f) < \infty$, $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{Z}$, $4 \leq a_1 < a_2 < \dots$
 $\dots < a_k$ e f_{a_i} homogênea real do grau a_i
 $(i = 1, \dots, k; n \geq 2)$. Consideremos $f_\lambda = f + \psi_\lambda$,
 onde $\psi_\lambda = h_\lambda + \psi$, com $h_\lambda \in H_{a_k}(n, 1)$ e
 $\psi \in m_n^{a_k+1}$, uma família de germes a s -parâme-
 tros $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_s) \in U \subset \mathbb{R}^n$, U aberto
 contendo $0 \in \mathbb{R}^s$.
 Então, existe uma bola aberta $B(0, \varepsilon) \subset U$, com
 centro $0 \in \mathbb{R}^s$ e raio $\varepsilon > 0$ suficientemente
 pequeno, tal que, para $\lambda \in B(0, \varepsilon)$ tem-se f_λ
 (r, s) -determinado, onde $s = r_1(a_1 - 2) + r_2(a_2 - 2) +$
 $+ \dots + r_{k-1}(a_{k-1} - 2) + (n - r_{k-1})(a_k - 2)$ e $r = s - (a_k - 1)$.

2.5. OBSERVAÇÕES: Considerando o exemplo do início do parágrafo,
 isto é, $f(x, y) = x^2y + y^3$, $\psi(x, y) = y^2$
 e $f_t = f + t\psi$, temos $f_0 = f$ é $(1, 3)$ -determinado pois
 $m_2^4 \subset m_2^2 \langle \partial f_0 \rangle$ e f_t não é $(1, 3)$ -determinado se $t \neq 0$. Neste
 caso temos $k = 3$, $r = 1$ e $\psi_t = ty^2 \in m_2^{k-r}$. Logo, a propo-
 sição (2.1) dá de um modo geral, a melhor estimativa para a per-
 turbação, no sentido de preservar a (r, k) -determinação.

§ 3. Alguns Equívocos da Literatura

Encontramos na literatura, alguns equívocos relaciona-
 dos com o tipo de questão abordada pela proposição (2.1).

3.1. J. Martinet, ([16]), propõe o seguinte problema:

"Sejam $||$ uma norma fixada em $J^{k-1}(n,1)$ e $f \in m_n$, tal que, $m_n^k \subset m_n \langle \partial f \rangle$.

Mostrar que existe $\varepsilon > 0$, tal que, para todo $g \in m_n$ com $|j^{k-1}f(0) - j^{k-1}g(0)| < \varepsilon$, tem-se $m_n^k \subset m_n \langle \partial g \rangle$."

Para tal, seja $f(x,y) = x^3 + y^4 \in m_2$. Logo, $m_2^4 \subset m_2 \langle \partial f \rangle$. Tomando $g_t(x,y) = x^3 + y^4 + t^2x^2 + 2txy^2$, temos que g_t é equivalente a $x^2 \pm y^6$, conforme $t > 0$ ou $t < 0$.

De fato: Fazendo $\frac{\partial}{\partial x}g_t = 0$, teremos $3x^2 + 2t(tx + y^2) = 0$.

Para $t \neq 0$, temos $x = x(y) = -\frac{y^2}{t} + o(y^4)$. Logo, $g_t(x(y), y) = -\frac{y^6}{t^3} + o(y^8)$.

Portanto, g_t é equivalente a $x^2 \pm y^6$, conforme $t > 0$ ou $t < 0$. Logo, $m_2^5 \subset \langle \partial g_t \rangle$, mas $m_2^4 \not\subset m_2 \langle \partial g_t \rangle$, para $t \neq 0$.

3.2. D. Siersma, ([23]), registra a seguinte proposição:

"Sejam $f, \psi \in m_n$ e $f_t = f + t\psi$, com $t \in \mathbb{R}$.

Se $m_n^{k+1} \subset m_n^2 \langle \partial f \rangle + m_n^{k+2}$, então $m_n^{k+1} \subset m_n^2 \langle \partial f_t \rangle + m_n^{k+2}$, para t suficientemente pequeno."

Um contra-exemplo para tal proposição, é o exemplo tratado no início do parágrafo anterior.

Como sabemos por (I - 7.1), trata-se de uma singularidade 0-modal.

Outro contra-exemplo, é dado pela singularidade 1-modal J_{10} : $x^3 + y^6 + tx^2y^2$, com $4t^3 + 27 \neq 0$. (Esta última

condição é para garantir a determinação finita do germe).

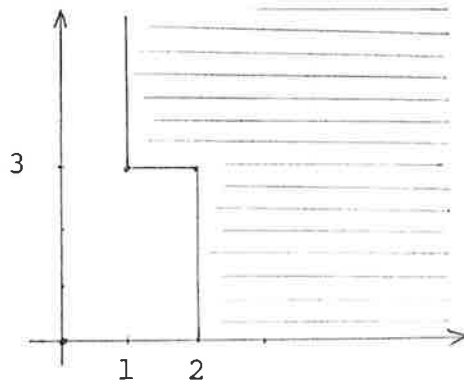
Para tal, consideremos $f(x,y) = x^3 + y^6$ e $\psi(x,y) = x^2 y^2$.

Temos $m_2^7 \subset m_2^2 \langle x^2, y^5 \rangle$. Logo, f é $(1,6)$ -determinado.

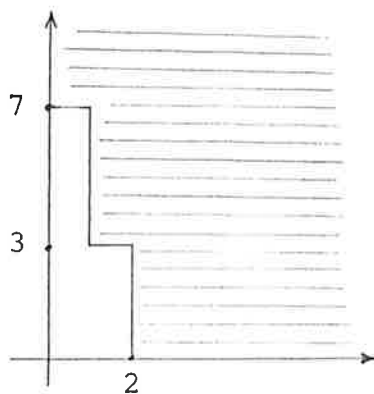
Seja $f_t = f + t\psi$. Logo, $\langle \partial f_t \rangle = \langle 3x^2 + 2txy^2, 3y^5 + tx^2y \rangle$.

Para $t \neq 0$, $4t^3 + 27 \neq 0$, temos que $m_2^2 \langle \partial f_t \rangle$ módulo $m_2^8 = \langle x^4, x^5, x^6, x^7, x^6y, x^5y^2, x^4y^3, x^3y^4, x^2y^5, xy^6, x^5y, x^4y^2, x^3y^3, x^2y^4, x^4y, x^3y^2, 3x^3y + 2tx^2y^3, 3x^2y^2 + 2txy^4, 3x^2y^3 + 2txy^5, 3y^7 + tx^2y^3 \rangle_R$.

A escada de $\langle \partial f_t \rangle$ contém a seguinte configuração:



Como f_t é quase-homogênea do tipo $(1; \frac{1}{3}, \frac{1}{6})$, segue por (I - 6.3) que $\mu(f_t) = 10$. Por (I - 5.1) segue que a escada de $\langle \partial f_t \rangle$ é dada por:



Disto segue que $y^7 \in \langle \partial f_t \rangle$.

Por outro lado, $y^7 \notin m_2^2 \langle \partial f_t \rangle$, pois do contrário, teríamos $y^7 \in \langle 3y^7 + tx^2y^3, 3x^3y + 2tx^2y^3, 3x^2y^3 + 2txy^5 \rangle_R$, o R-espaço gerado por todos os geradores de $m_2^2 \langle \partial f_t \rangle$ módulo m_2^8 , que estão ligados a y^7 . Mas isto é um absurdo.

Logo, f_0 é (1,6)-determinado e f_t é (0,6)-determinado, mas não (1,6)-determinado se $t \neq 0$ e $4t^3 + 27 \neq 0$.

3.3. No mesmo trabalho, ([23]), Siersma afirma que a proposição acima citada, continua verdadeira para perturbações com s-parâmetros, $s \geq 2$.

Tomando $f_{\lambda_1, \lambda_2}(x, y) = x^3 + y^4 + \lambda_1 x^2 + \lambda_2 xy^2$, e considerando o caminho $\lambda_1 = \left(\frac{\lambda_2}{2}\right)^2$, cairemos no exemplo visto em (3.1). Logo, tal afirmação é falsa.

3.4. Ainda Siersma, ([23]), como consequência da proposição citada em (3.2), registrou o seguinte resultado como corolário:

"Sejam $f, \psi \in m_n$, tais que:

$$(i) \quad m_n^{k+1} \subset m_n^2 \langle \partial f \rangle + m_n^{k+2};$$

$$(ii) \quad \psi \notin m_n \langle \partial f \rangle + m_n^{k+1}$$

Então, f não é equivalente a $f + t\psi$, se t for suficientemente pequeno."

Tal corolário é verdadeiro, embora no referido trabalho, tenha sido "demonstrado" fazendo uso da proposição citada em (3.2). Passemos a demonstrá-lo:

Por (i), temos que f é k -determinado.

Seja $\gamma(t) = j^k f(0) + t j^k \psi(0)$, $t \in \mathbb{R}$. Se existir $\varepsilon > 0$, tal que, para todo $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, $\gamma(t) \in \mathcal{R}^k j^k f(0)$, então, $\gamma(t)$ é equivalente a $j^k f(0)$ que é equivalente a f , para todo $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.

Logo, $\gamma'(0) = j^k \psi(0) \in T_z \mathcal{R}^k z$, onde $z = j^k f(0)$. Como $T_z \mathcal{R}^k z = m_n^{<\partial f>} \text{ módulo } m_n^{k+1}$, segue que $\psi \in m_n^{<\partial f>} + m_n^{k+1}$, contra (ii).

Como em $J^k(n, 1)$, a intersecção de uma variedade linear 1-dimensional L com uma $\mathcal{R}^k$ -órbita é um conjunto finito de pontos ou uma reunião de intervalos abertos em L ([23]), segue que existe $\delta > 0$, tal que, $\gamma(t) \notin \mathcal{R}^k z$, para todo $t \in (-\delta, \delta)$, $t \neq 0$.

Portanto, f não é equivalente a $f + t\psi$, para todo $t \in (-\delta, \delta)$, $t \neq 0$.

3.5. OBSERVAÇÕES: Quanto à proposição citada em (3.2), o erro na "demonstração", consiste no seguinte argumento usado:

O autor considerou $\psi : \frac{m_n}{m_n^{k+2}} \rightarrow \frac{m_n^{k+1}}{m_n^{k+2}}$ a projeção

natural. Pelas hipóteses dadas, temos que

$$\psi\left(\frac{m_n^{2<\partial f_t>} + m_n^{k+2}}{m_n^{k+2}}\right) = \frac{m_n^{k+1}}{m_n^{k+2}} \quad \text{se } t = 0.$$

Como a família $f_t = f + t\psi$ é contínua em t , segue que

$$\psi \left(\frac{m_n^{2<\partial f_t>} + m_n^{k+2}}{m_n^{k+2}} \right) = \frac{m_n^{k+1}}{m_n^{k+2}},$$

para t suficientemente próximo de $0 \in \mathbb{R}$.

Disto, ele concluiu erradamente que $m_n^{k+1} < m_n^{2<\partial f_t>} + m_n^{k+2}$, para t suficientemente próximo de $0 \in \mathbb{R}$.

CAPÍTULO III

SEPARAÇÃO DE VARIÁVEIS

§ 1. Decomposições

Seja $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1.1. DEFINIÇÃO: Seja $\Sigma = \Sigma_{i_1 i_2} \dots$ o símbolo de Boardman de um germe $f \in m_n \subset C_0(K^n)$. Por uma *decomposição* de Σ , entenderemos a soma $\Sigma_{j_1} \dots + \Sigma_{\ell_1} \dots$, com $1 \leq j_1, \ell_1$, e por uma *decomposição completa* de Σ , entenderemos a soma $\Sigma = \Sigma_1 \dots + \dots + \Sigma_1 \dots$ com i_1 parcelas, onde $\Sigma_{r_1} \dots + \Sigma_{s_1} \dots = \Sigma_{t_1} \dots$, com $t_i = r_i + s_i$, $i \geq 1$.

1.2. DEFINIÇÃO: Seja $f \in m_n \subset C_0(K^n)$, com $n \geq 2$.

- (i) f se *decompõe*, se para algum $r \in \mathbb{Z}$, $1 \leq r < n$, f for equivalente a um germe da forma $g(x_1, \dots, x_r) + h(x_{r+1}, \dots, x_n)$.
- (ii) f se *j-decompõe*, onde $j \in \mathbb{Z}$, $1 \leq j \leq n$, se f for equivalente a um germe da forma $\alpha_1 x_1^{a_1} + \dots + \alpha_j x_j^{a_j} + g(x_{j+1}, \dots, x_n)$, onde $\alpha_i \in K$, $a_i \in \mathbb{Z}$, $a_i \geq 1$, para $i = 1, \dots, j$. Para o caso de $j = n$, diremos que f se *decompõe completamente*.

(iii) f admite uma *boa-decomposição*, se f for equivalente a um germe da forma $f_{a_1}(x_1, \dots, x_{r_1}) + f_{a_2}(x_{r_1+1}, \dots, x_{r_2}) + \dots + f_{a_k}(x_{r_{k-1}+1}, \dots, x_n)$, onde $a_i \in \mathbb{Z}$, $a_i \geq 1$, f_{a_i} é uma K -forma homogênea não degenerada de grau a_i , ($i = 1, \dots, k$) e $a_1 < a_2 < \dots < a_k$.

(iv) f admite uma *semi-bom-decomposição*, se f for equivalente a um germe da forma $f_{a_1}(x_1, \dots, x_{r_1}) + f_{a_2}(x_{r_1+1}, \dots, x_{r_2}) + \dots + f_{a_k}(x_{r_{k-1}+1}, \dots, x_n) + h(x_1, \dots, x_n)$, onde $f_{a_1}, \dots, f_{a_k}$ são como em (iii) e $h \in m_n^{a_k+1}$.

1.3. PROPOSIÇÃO: Seja $f \in m_n^2 \subset C_O(K^n)$, com $f(x_1, \dots, x_n) = g(x_1, \dots, x_r) + h(x_{r+1}, \dots, x_n)$ e $1 \leq r < n$. Então, $\mu(f) < \infty$, se e somente se, $\mu(g) < \infty$ e $\mu(h) < \infty$ como germes de $C_O(K^r)$ e $C_O(K^{n-r})$ respectivamente, e, $\mu(f) = \mu(g)\mu(h)$.

Demonstração: Podemos supor que f, g e h são polinomiais.

Seja $K = \mathbb{R}$. Denotemos por f_C, g_C e h_C as complexificações de f, g e h , respectivamente.

Temos por ([13]) que, $\dim_{\mathbb{R}} Q(f) = \dim_{\mathbb{C}} Q(f_C)$ (analogamente para g e h).

Logo,

$$\mu(f) = \dim_{\mathbb{R}} \frac{C_O(\mathbb{R}^n)}{\langle \partial g, \partial h \rangle} = \dim_{\mathbb{C}} \frac{C_O(\mathbb{C}^n)}{\langle \partial g_C, \partial h_C \rangle}$$

Como $f \in m_n^2$, segue que $g \in m_r^2$ e $h \in m_{n-r}^2$. Portanto, $g_C \in m_r^2$ e $h_C \in m_{n-r}^2$. Disto segue que $\mu(f) < \infty$ se e somente, $\mu(g) < \infty$ e $\mu(h) < \infty$.

Mostremos agora que $\mu(f) = \mu(g)\mu(h)$.

Para tal, sejam F, G e H , germes de aplicações holomorfas, definidos por:

$$G : C^r, 0 \rightarrow C^r, 0 ; H : C^{n-r}, 0 \rightarrow C^{n-r}, 0 \quad e$$

$$F : C^r \times C^{n-r}, 0 \rightarrow C^r \times C^{n-r}, 0, \quad \text{tais que,}$$

$$G(x) = (\partial_1 g_C(x), \dots, \partial_r g_C(x)),$$

$$H(y) = (\partial_1 h_C(y), \dots, \partial_{n-r} h_C(y)) \quad e$$

$$F(x, y) = (G(x), H(y)), \quad \text{onde } x = (x_1, \dots, x_r) \quad e$$

$$y = (x_{r+1}, \dots, x_n)$$

Com tais notações, temos que,

$$\mu(f) = \dim_C \frac{C_O(C^n)}{\langle G, H \rangle}, \quad \mu(g) = \dim_C \frac{C_O(C^r)}{\langle G \rangle} \quad e$$

$$\mu(h) = \dim_C \frac{C_O(C^{n-r})}{\langle H \rangle}.$$

Por ([13]), podemos considerar $0 \in \text{interior } A_1$, $A_1 \subset C^r$, $0 \in \text{interior } A_2$, $A_2 \subset C^{n-r}$, onde A_1 e A_2 são retângulos fechados nos respectivos espaços, e, $(x_0, y_0) \in C^r \times C^{n-r}$, tais que:

- (1) $\mu(g) = \text{cardinalidade de } G^{-1}(x_0) \cap A_1$;
- (2) $\mu(h) = \text{cardinalidade de } H^{-1}(y_0) \cap A_2$ e,
- (3) $\mu(f) = \text{cardinalidade de } F^{-1}(x_0, y_0) \cap A_1 \times A_2$.

Portanto, $\mu(f)$ é o número de soluções da equação $F(x,y) = (x_0, y_0)$ em $A_1 \times A_2$. Como $F(x,y) = (G(x), H(y))$, segue por (1) e (2) que $\mu(f) = \mu(g)\mu(h)$.

Para o caso $K = \mathbb{C}$, prova-se de maneira análoga.

1.4. OBSERVAÇÕES: A proposição é em geral, falsa para $f \notin m_n^2$.

Para tal, basta tomarmos $f(x_1, \dots, x_n) = g(x_1) + h(x_2, \dots, x_n)$ com $g(x_1) = x_1$ e $h \in m_n^\infty$, $n \geq 2$. Portanto, $\mu(f) = 0$, $\mu(g) = 0$ e $\mu(h) = \infty$.

Como consequência imediata de (1.3), temos o:

1.5. COROLÁRIO: Seja $f \in m_n^2 \subset C_0(K^n)$, $n \geq 2$.

Se f admitir uma semi-bom-decomposição da forma $f_{a_1}(x_1, \dots, x_{r_1}) + f_{a_2}(x_{r_1+1}, \dots, x_{r_2}) +$

$+ \dots + f_{a_k}(x_{r_{k-1}+1}, \dots, x_n) + h(x_1, \dots, x_n)$,

com $h \in m_n^{a_k+1}$ ($2 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_k$), então,

$$\mu(f) = (a_1-1)^{r_1} (a_2-1)^{r_2-r_1} (a_3-1)^{r_3-r_2} \dots$$

$$\dots (a_{k-1}-1)^{r_{k-1}-r_{k-2}} (a_k-1)^{n-r_{k-1}}.$$

Demonstração: Seja $g_a(x_1, \dots, x_n)$ uma K -forma homogênea do grau a em $x_1, \dots, x_n$, não degenerada. Por (I - 6.3), temos que $\mu(g_a) = (a-1)^n$.

Logo, $\mu(f_{a_1}) = (a_1-1)^{r_1}$, $\mu(f_{a_k}) = (a_k-1)^{n-r_{k-1}}$ e

$\mu(f_{a_i}) = (a_i-1)^{r_i-r_{i-1}}$, para $i = 2, 3, \dots, k-1$.

Por (1.3) temos que $\mu(f_{a_1} + \dots + f_{a_k}) = \mu(f_{a_1})\mu(f_{a_2}) \dots \mu(f_{a_k})$.

Temos que, f é equivalente a um germe semi-quase-homogêneo do tipo

$$\left(\underbrace{\frac{1}{a_1}, \dots, \frac{1}{a_1}}_{r_1}, \underbrace{\frac{1}{a_2}, \dots, \frac{1}{a_2}}_{r_2 - r_1}, \dots, \underbrace{\frac{1}{a_{k-1}}, \dots, \frac{1}{a_{k-1}}}_{r_{k-1} - r_{k-2}}, \underbrace{\frac{1}{a_k}, \dots, \frac{1}{a_k}}_{n - r_{k-1}} \right)$$

onde a parte quase-homogênea não degenerada (f_0 : conforme I - § 6) é $f_{a_1} + f_{a_2} + \dots + f_{a_k}$. De fato: seja g um monômio não nulo de $m_n^{a_k+1}$. Denotemos por c_i , a soma dos expoentes das variáveis de f_{a_i} que efetivamente comparecem em g . Portanto, $c_1, \dots, c_k \geq 0$ e $c_1 + c_2 + \dots + c_k \geq a_k + 1$. Como $2 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_k$ então, o grau de g com relação aos pesos

$$\left(\underbrace{\frac{1}{a_1}, \dots, \frac{1}{a_1}}_{r_1}, \underbrace{\frac{1}{a_2}, \dots, \frac{1}{a_2}}_{r_2 - r_1}, \dots, \underbrace{\frac{1}{a_{k-1}}, \dots, \frac{1}{a_{k-1}}}_{r_{k-1} - r_{k-2}}, \underbrace{\frac{1}{a_k}, \dots, \frac{1}{a_k}}_{n - r_{k-1}} \right)$$

é $\frac{c_1}{a_1} + \frac{c_2}{a_2} + \dots + \frac{c_k}{a_k} \geq \frac{c_1}{a_k} + \frac{c_2}{a_k} + \dots + \frac{c_k}{a_k} \geq 1 + \frac{1}{a_k}$. Logo, a nossa afirmação está provada.

Por (I - 6.1) temos que

$$\mu(f) = (a_1 - 1)^{r_1} (a_k - 1)^{n - r_{k-1}} \cdot \prod_{i=2}^{k-1} (a_i - 1)^{r_i - r_{i-1}}$$

1.6. COROLÁRIO: Seja $f \in m_n^r - m_n^{r+1}$, com $\mu(f) < \infty$, $r \geq 3$ e $n \geq 2$.

Se f 1-decompõe, então existe $a \in \mathbb{Z}$, com $1 < a < \mu(f)$, tal que, $a \geq r-1$, a divide $\mu(f)$ e $\mu(f) \geq a(\Delta - n + 1)$, onde

$$\Delta = \binom{n+r-2}{r-1}.$$

Demonstração: Por hipótese, f é equivalente a um germe da forma $\alpha_1 x_1^b + h(x_2, \dots, x_n)$, com $b \geq r$, $\alpha_1 \in K$, $\alpha_1 \neq 0$ e $h \in m_{n-1}^r$. Por (1.3) segue que $\mu(f) = (b-1)\mu(h)$, onde

$$\mu(h) = \dim_K \frac{C_0(K^{n-1})}{\langle \partial h \rangle}.$$

Logo, $\langle \partial h \rangle \subset m_{n-1}^{r-1}$, como ideais de $C_0(K^{n-1})$, e portanto,

$$\mu(h) \geq \sum_{\ell=0}^{r-1} \binom{n+\ell-2}{\ell} - n+1, \text{ onde } \binom{m+k-1}{k} \text{ é}$$

o número de coeficientes de um polinômio homogêneo genérico do grau k em m indeterminadas. Seja

$$\Delta = \sum_{\ell=0}^{r-1} \binom{n+\ell-2}{\ell} = \binom{n+r-2}{r-1}$$

Tomando $a = b-1 \geq r-1 \geq 2$, segue o resultado.

1.7. OBSERVAÇÕES: (1.6) é falso para $n = 1$ ou $r = 2$. Para tal, basta observarmos os germes $f(x) = x^8$ e $g(x,y) = x^2 + y^6$. Por outro lado, a hipótese de 1-decomposição também é indispensável, como mostra o exemplo $h(x,y) = x^3 + xy^3$.

Seja $f : K^n, 0 \rightarrow K, 0$, com $f \in m_n^2$, $f(x_1, \dots, x_n) = g(x_1, \dots, x_r) + h(x_{r+1}, \dots, x_n)$, $1 \leq r < n$ e $g, h \in m_n$.

1.8. DEFINIÇÃO: $B_f^n = B_f^r$, B_g^r = símbolo de Boardman do germe $g : K^r, 0 \rightarrow K, 0$ e B_h^{n-r} = símbolo de Boardman do germe $h : K^{n-r}, 0 \rightarrow K, 0$.

Com tais notações, temos a:

1.9. PROPOSIÇÃO: $B_f^n = B_g^r + B_h^{n-r}$.

Demonstração: Sejam $B_f = \sum i_1 i_2 \dots$, $B_g^r = \sum j_1 \dots$ e

$$B_h^{n-r} = \sum \ell_1 \dots$$

Como $f \in m_n^2$, $g \in m_r^2$ e $h \in m_{n-r}^2$, segue que $i_1 = n$, $j_1 = r$, $\ell_1 = n-r$, e portanto, $i_1 = j_1 + \ell_1$.

Temos também que

$$\delta \langle f \rangle = \langle g+h, \partial_1 g, \dots, \partial_r g, \partial_{r+1} h, \dots, \partial_n h \rangle$$

como ideal de $C_0(K^n)$, $\delta \langle g \rangle = \langle g, \partial_1 g, \dots, \partial_r g \rangle$ como ideal de $C_0(K^r)$ e, $\delta \langle h \rangle = \langle h, \partial_{r+1} h, \dots, \partial_n h \rangle$ como ideal de $C_0(K^{n-r})$.

Como $g = g(x_1, \dots, x_r) \in m_r^2$, $h = h(x_{r+1}, \dots, x_n) \in m_{n-r}^2$, segue que $i_2 = j_2 + \ell_2$.

Suponhamos que $f \in m_n^c - m_n^{c+1}$, com $c \geq 2$. Logo, $g \in m_r^c$ e $h \in m_{n-r}^c$, com $g \in m_r^c - m_r^{c+1}$ ou $h \in m_{n-r}^c - m_{n-r}^{c+1}$.

Nestas condições, com raciocínio análogo ao usado acima, segue que $i_\alpha = j_\alpha + \ell_\alpha$, para $1 \leq \alpha \leq c$.

Como $f \in m_n^c - m_n^{c+1}$, com $c \geq 2$, seja posto $\delta^{c-1} \langle f \rangle = a \neq 0$.

Se $a = n$, então a proposição está demonstrada, pois $g = g(x_1, \dots, x_r)$ e $h = h(x_{r+1}, \dots, x_n)$.

Seja $1 \leq a < n$. Como $g \in m_r^c$ e $h \in m_{n-r}^c$, existem s elementos de $\delta^{c-1} \langle g \rangle$ e t elementos de $\delta^{c-1} \langle h \rangle$ (com $t+s = a$) cujas partes lineares são K -linearmente independentes.

Aproveitando estes elementos, fazemos uma mudança de coordenadas da forma:

$$\psi : \begin{cases} x_i = X_i(x_1, \dots, x_r), & i = 1, \dots, r \\ x_j = X_j(x_{r+1}, \dots, x_n), & j = r+1, \dots, n \end{cases}$$

tal que: $\delta^{c-1}_{\langle f \rangle}$ é equivalente a um ideal da forma

$$\begin{aligned} &\langle G(x_{s+1}, \dots, x_r) + H(x_{r+t+1}, \dots, x_n), x_1, \dots, x_s, \\ &p_1(x_{s+1}, \dots, x_r), \dots, p_u(x_{s+1}, \dots, x_r), x_{r+1}, \dots, x_{r+t}, \\ &q_1(x_{r+t+1}, \dots, x_n), \dots, q_v(x_{r+t+1}, \dots, x_n) \rangle \end{aligned}$$

como ideal de $C_O(K^n)$;

$\delta^{c-1}_{\langle g \rangle}$ é equivalente a

$$\begin{aligned} &\langle G(x_{s+1}, \dots, x_r), x_1, \dots, x_s, p_1(x_{s+1}, \dots, x_r), \dots, \\ &\dots, p_u(x_{s+1}, \dots, x_r) \rangle \end{aligned}$$

como ideal de $C_O(K^r)$, e, $\delta^{c-1}_{\langle h \rangle}$ é equivalente a

$$\begin{aligned} &\langle H(x_{r+t+1}, \dots, x_n), x_{r+1}, \dots, x_{r+t}, \\ &q_1(x_{r+t+1}, \dots, x_n), \dots, q_v(x_{r+t+1}, \dots, x_n) \rangle \end{aligned}$$

como ideal de $C_O(K^{n-r})$, onde $H, q_1, \dots, q_v \in m_{n-r}^2$ e $G, p_1, \dots, p_u \in m_r^2$.

Considerando a matriz:

$$M = \begin{bmatrix} I_s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\partial_i p_j) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\partial_\omega q_m) \\ 0 & (\partial_i G) & 0 & (\partial_\omega H) \end{bmatrix},$$

onde $i = s+1, \dots, r$; $j = 1, \dots, u$; $\omega = r+t+1, \dots, n$ e $m = 1, \dots, v$, segue que

$$\delta^C \langle f \rangle = \delta^{C-1} \langle f \rangle + \langle \partial_i p_j, \partial_\omega q_m, \partial_i G, \partial_\omega H \rangle C_O(K^n),$$

$$\delta^C \langle g \rangle = \delta^{C-1} \langle g \rangle + \langle \partial_i p_j, \partial_i G \rangle C_O(K^r)$$

$$e \quad \delta^C \langle h \rangle = \delta^{C-1} \langle h \rangle + \langle \partial_\omega q_m, \partial_\omega H \rangle C_O(K^{n-r}).$$

Como $p_j = p_j(x_{s+1}, \dots, x_r)$, $q_m = q_m(x_{r+t+1}, \dots, x_n)$, $G = G(x_{s+1}, \dots, x_r)$ e $H = H(x_{r+t+1}, \dots, x_n)$, segue que posto $\delta^C \langle f \rangle = \text{posto } \delta^C \langle g \rangle + \text{posto } \delta^C \langle h \rangle$, donde concluimos que $i_{c+1} = j_{c+1} + \ell_{c+1}$.

Seguindo raciocínio análogo, aproveitando em cada estágio as funções cujas partes lineares são K -linearmente independentes, mantendo as variáveis separadas, teremos $i_k = j_k + \ell_k$, $k \geq 1$.

1.10. OBSERVAÇÕES: Tomando $f(x, y) = g(x) + h(y)$, com $g(x) = x$ e $h(y) = y$, tem-se $i_1 = 1$, $j_1 = 0$ e $\ell_1 = 0$. Portanto, (1.9) em geral é falsa para $f \in m_n^2 - m_n^2$.

1.11. COROLÁRIO: Seja $f \in m_n^2 \subset C_O(K^n)$, equivalente a $f_{a_1}(x_1, \dots, x_{r_1}) + f_{a_2}(x_{r_1+1}, \dots, x_{r_2}) + \dots + f_{a_k}(x_{r_{k-1}+1}, \dots, x_n) + h(x_1, \dots, x_n)$, onde f_{a_i} é homogênea do grau a_i , não degenerada, ($i = 1, \dots, k$), $2 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_k$ e $h \in m_n^{a_k+1}$.
Então, $B_f = B_{f_{a_1}}^{r_1} + B_{f_{a_2}}^{r_2-r_1} + \dots + B_{f_{a_{k-1}}}^{r_{k-1}-r_{k-2}} + B_{f_{a_k}}^{n-r_{k-1}}$.

Demonstração: Sendo $2 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_k$, segue que posto $\delta^{a_1-2} \langle f \rangle = 0$ e posto $\delta^{a_1-1} \langle f \rangle = r_1$. Logo existe mudança de coordenadas da forma:

$$\psi : \begin{cases} x_i = x_i(x_1, \dots, x_{r_1}), & i = 1, \dots, r_1 \\ x_j = x_j, & j \geq r_1+1, \end{cases} \quad \text{tal que, } \delta^{a_1-1} \langle f \rangle,$$

é equivalente a um ideal da forma $\langle x_1, \dots, x_{r_1} \rangle + \delta^{a_1-1} \langle f_{a_2} \rangle + \dots + \delta^{a_1-1} \langle f_{a_k} \rangle$ módulo $m_n^{a_k-a_1+2}$.

Como $2 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_k$, segue que posto $\delta^{a_2-2} \langle f \rangle = r_1$ e posto $\delta^{a_2-1} \langle f \rangle = r_2$, pois f_{a_2} é não degenerada em $x_{r_1+1}, \dots, x_{r_2}$. Do mesmo modo como acima, existe uma mudança de coordenadas da forma:

$$\psi : \begin{cases} x_i = x_i, & i = 1, \dots, r_1 \\ x_j = x_j(x_{r_1+1}, \dots, x_{r_2}), & j = r_1+1, \dots, r_2 \\ x_\ell = x_\ell, & \ell \geq r_2+1 \end{cases}$$

tal que, $\delta^{a_2-1} \langle f \rangle$ é equivalente a um ideal da forma

$$\langle x_1, \dots, x_{r_2} \rangle + \delta^{a_2-1} \langle f_{a_3} \rangle + \dots + \delta^{a_2-1} \langle f_{a_k} \rangle \text{ módulo } m_n^{a_k-a_2+2}$$

Seguindo com o mesmo raciocínio, teremos o resultado.

Nosso objetivo neste capítulo é dar para algumas classes de germes, condições necessárias e, para outras classes,

condições necessárias e suficientes para a decomposição do germe, conforme (1.2).

Neste contexto, temos o conhecido Lema, que em nossas notações, pode ser enunciado da seguinte forma:

1.12. Splitting Lemma: Sejam $f \in m_n^2 - m_n^3$ e j a característica da matriz Hessiana de f em $0 \in K^n$. Então, f j -decompõe.

Ainda neste contexto, temos o seguinte Teorema devido a Oka ([20]):

1.13. TEOREMA: Seja f um polinômio em $C^n \times C^m$ tal que $f(z, \omega) = g(z) + h(\omega)$, onde $g(z)$ e $h(\omega)$ são polinômios quase-homogêneos em C^n e C^m respectivamente. Sejam $F_f = f^{-1}(1) \subset C^n \times C^m$, $F_g = g^{-1}(1) \subset C^n$ e $F_h = h^{-1}(1) \subset C^m$. Então, existe uma equivalência natural de homotopia entre F_f e $F_g * F_h$, onde $F_g * F_h$ é o *join* de F_g e F_h com a topologia forte.

O Teorema de Oka (1.13), foi enunciado apenas por ter um conteúdo próximo do que estamos estudando, mas não o utilizaremos em momento algum neste trabalho.

Como decorrência imediata do corolário (1.11), temos o:

1.14. COROLÁRIO: Seja $f \in m_n^2 \subset C_0(K^n)^\circ$, com $\mu(f) < \infty$. Se f admitir uma semi-bom-decomposição da forma:

$f_{a_1}(x_1, \dots, x_{r_1}) + f_{a_2}(x_{r_1+1}, \dots, x_{r_2}) + \dots +$
 $+ f_{a_k}(x_{r_{k-1}+1}, \dots, x_n) + h(x_1, \dots, x_n)$ (con-
 forme 1.2 - iv), segue que

$$B_f = \underbrace{\sum_{r_1 \dots r_1}^{a_1-1}}_0 + \underbrace{\sum_{r_2-r_1 \dots r_2-r_1}^{a_2-1}}_0 + \dots +$$

$$+ \underbrace{\sum_{r_{k-1}-r_{k-2} \dots r_{k-1}-r_{k-2}}^{a_{k-1}-1}}_0 +$$

$$+ \underbrace{\sum_{n-r_{k-1} \dots n-r_{k-1}}^{a_k-1}}_0 \quad e$$

$$\mu(f) = (a_1-1)^{r_1} (a_k-1)^{n-r_{k-1}} \cdot \prod_{i=2}^{k-1} (a_i-1)^{r_i-r_{i-1}}.$$

1.15. OBSERVAÇÕES: Seja $f \in m_2^2 \subset C_O(K^2)$, $f(x,y) = x^3 + xy^4$.

Sendo f quase-homogênea não degenerada do tipo $(6;2,1)$, segue por (I - 6.3) que $\mu(f) = 10$. Temos $B_f = \sum 2 \ 2 \ 1 \ 1 \ 0 = \sum 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 + \sum 1 \ 1 \ 0$. Logo, f não admite uma semi-bom-decomposição, pois do contrário, por (1.14) teríamos $\mu(f)=8$, o que é uma contradição. Portanto, a hipótese de semi-bom-decomposição é indispensável em (1.14).

1.16. LEMA: Seja $f \in m_n^3 \subset C_O(K^n)$, com $\mu(f) < \infty$ e $n \geq 2$.

Sejam $\lambda(\mu(f))$ o número de fatores primos de $\mu(f)$, contadas as multiplicidades e $j \in \mathbb{Z}$, com $1 \leq j < n$.

Se $\lambda(\mu(f)) \leq j$, então f não j -decompõe.

Demonstração: Como $\mu(f) < \infty$, então se f j -decompõe, segue que f é equivalente a um germe da forma $\alpha_1 x_1^{a_1} + \dots + \alpha_j x_j^{a_j} + h(x_{j+1}, \dots, x_n)$, com $\alpha_i \neq 0$ ($i=1, \dots, j$) e $3 \leq a_1, \dots, a_j$, $h \in m_n^3$, pois $f \in m_n^3$ ($\alpha_i \in K$).

Por (1.3) segue que $\mu(f) = (a_1-1)(a_2-1) \dots (a_j-1)\mu(h)$,

onde $\mu(h) = \dim_K \frac{C_O(K^{n-j})}{\langle \partial h \rangle} \geq 2$, pois $h \in m_{n-j}^3$

Sendo $a_1, \dots, a_j \geq 3$, segue que $\lambda(\mu(f)) \geq j+1$, que é contra a hipótese.

1.17. OBSERVAÇÕES: Seja $f \in m_n \subset C_O(K^n)$, $n \geq 2$, com

$$f(x_1, \dots, x_n) = x_1^2 + x_2^{p_1+1} + \dots + x_n^{p_{n-1}+1},$$

onde $3 \leq p_1 \leq \dots \leq p_{n-1}$ e $p_1, \dots, p_{n-1}$ são inteiros primos. Logo, $\lambda(\mu(f)) = n-1$ pois, $\mu(f) = p_1 p_2 \dots p_{n-1}$. Portanto, (1.16) é falso em geral, para $f \in m_n^2 - m_n^3$.

1.18. COROLÁRIO: Seja $f \in m_n^3 \subset C_O(K^n)$, com $n \geq 2$ e $\mu(f)$ primo.

Então, f não se decompõe e nem admite uma semi-bom-decomposição.

1.19. COROLÁRIO: Sejam $f \in m_n^3 \subset C_O(K^n)$, $n \geq 2$, semi-quase-homogênea do tipo $(d; \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ e

$$\beta_s = \frac{d - d_s}{\alpha_s}, \text{ para } s = 1, \dots, n.$$

Se $\lambda(\beta_1 \beta_2 \dots \beta_n) \leq j$, onde $j \in \mathbb{Z}$, $1 \leq j < n$, então f não j -decompõe. Além disso, se $\beta_1 \dots \beta_s$ for primo, então f não se decompõe e nem admite uma semi-bom-decomposição.

§ 2. Invariante λ_0

Sejam $f \in m_n^2 \subset C_0(K^n)$ e α (se existir), o menor inteiro positivo tal que, $m_n^\alpha \subset \langle \partial f, f \rangle$. Tal α existe, se e somente se, f for finitamente determinado. Suponhamos então que $\mu(f) < \infty$.

Nas condições acima, seja β o maior inteiro tal que, $m_n^\alpha \subset m_n^\beta \langle \partial f, f \rangle$.

2.1. DEFINIÇÃO: $\alpha = \alpha(f)$, $\beta = \beta(f)$ e $\lambda_0 = \lambda_0(f) = \alpha(f) - \beta(f)$.

2.2. LEMA: λ_0 é um invariante da R -órbita ($\tilde{R}$ -órbita).

Demonstração: Sejam $K = R$, $m_n^\alpha \subset m_n^\beta \langle \partial f, f \rangle$, com $\alpha = \alpha(f)$ e $\beta = \beta(f)$ e $g = f \circ \psi$, onde $\psi \in R$.

Logo, $\psi^* : C_0(R^n) \rightarrow C_0(R^n)$ é um isomorfismo de R -álgebras, onde $\psi^*(h) = h \circ \psi$. Temos que, $g'(x) = f'(\psi(x)) \circ \psi'(x)$.

Considerando $e_1, \dots, e_n$ a base canônica do R^n , isto é, $e_i = (0, \dots, 0, \overset{i}{1}, 0, \dots, 0)$, $i = 1, \dots, n$, segue que

$$\frac{\partial g}{\partial x_i}(x) = f'(\psi(x)) \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial \psi_j}{\partial x_i}(x) e_j \right), \text{ onde } \psi = (\psi_1, \dots, \psi_n). \text{ Por-}$$

$$\text{tanto, } \frac{\partial g}{\partial x_i} = \left[\sum \left(\frac{\partial \psi_j}{\partial x_i} \circ \psi^{-1} \right) \frac{\partial f}{\partial y_j} \right] \circ \psi, \quad i = 1, \dots, n.$$

$$\text{Logo, } (\psi^{-1})^* \langle \partial g, g \rangle \subset \langle \partial f, f \rangle \text{ e portanto, } \psi^* \langle \partial f, f \rangle = \langle \partial g, g \rangle.$$

Sendo ψ^* um isomorfismo de R -álgebras, segue que $\psi^* m_n = m_n$ e portanto, $m_n^\alpha \subset m_n^\beta \langle \partial g, g \rangle$, com $\alpha = \alpha(g)$ e $\beta = \beta(g)$. Disto segue que λ_0 é um invariante da R -órbita.

Para o caso $K = C$, a demonstração é análoga.

2.3. PROPOSIÇÃO: Seja $f \in m_n^2 \subset C_0(K^n)$, com $n \geq 2$.

Se f admitir uma semi-bom-decomposição, então $i_{\lambda_0} \neq 0$ e $i_{\lambda_0+1} = 0$, onde

$$B_f = \sum i_1 \dots i_{\lambda_0} \dots$$

Demonstração: Suponhamos que f é equivalente a um germe da forma $f_{a_1}(x_1, \dots, x_{r_1}) + f_{a_2}(x_{r_1+1}, \dots, x_{r_2}) + \dots + f_{a_k}(x_{r_{k-1}+1}, \dots, x_n) + h(x_1, \dots, x_n)$, com $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{Z}$, $2 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_k$, f_{a_i} homogênea do grau a_i não degenerada em suas variáveis ($i = 1, \dots, k$) e $h \in m_n^{a_k+1}$. Por (1.14), temos $B_f = \sum_n i_2 i_3 \dots i_{a_k-1} 0$, com $i_{a_k-1} = n - r_{k-1} \neq 0$. Como f_{a_i} é homogênea do grau a_i com

$$f_{a_i} = \begin{cases} f_{a_1}(x_1, \dots, x_{r_1}) & \text{se } i = 1 \\ f_{a_k}(x_{r_{k-1}+1}, \dots, x_n) & \text{se } i = k \\ f_{a_i}(x_{r_{i-1}+1}, \dots, x_{r_i}) & \text{se } i \neq 1, k \end{cases}$$

e $h \in m_n^{a_k+1}$, $2 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_k$, segue que

$$\begin{aligned} & x_1^{a_1-2} \dots x_{r_1}^{a_1-2} x_{r_1+1}^{a_2-2} \dots x_{r_2}^{a_2-2} \dots x_{r_{k-1}+1}^{a_k-2} \dots \\ & \dots x_n^{a_k-2} \notin \langle \partial f, f \rangle. \end{aligned}$$

Seja $\sigma = r_1(a_1-2) + (r_2-r_1)(a_2-2) + \dots + (r_{k-1}-r_{k-2})(a_{k-1}-2) + (n-r_{k-1})(a_k-2)$. Logo, $m_n^\sigma \not\subset \langle \partial f, f \rangle + m_n^{\sigma+1}$.

Mostremos que $m_n^{\sigma+1} \subset \langle \partial f, f \rangle + m_n^{\sigma+2}$.

Com as hipóteses dadas, temos que

$$m_{r_1}^{r_1(a_1-2)+1} \subset m_{r_1}^{\gamma_1 < \partial f_{a_1} >}, \quad m_{n-r_{k-1}}^{(n-r_{k-1})(a_k-2)+1} \subset m_{n-r_{k-1}}^{\gamma_k < \partial f_{a_k} >}$$

e

$$m_{r_i-r_{i-1}}^{(r_i-r_{i-1})(a_i-2)+1} \subset m_{r_i-r_{i-1}}^{\gamma_i < \partial f_{a_i} >} \quad (i \neq 1, k),$$

onde

$$m_{n-r_{k-1}} = \langle x_{r_{k-1}+1}, \dots, x_n \rangle C_O(K^{n-r_{k-1}}),$$

$$m_{r_1} = \langle x_1, \dots, x_{r_1} \rangle C_O(K^{r_1}),$$

$$m_{r_i-r_{i-1}} = \langle x_{r_{i-1}+1}, \dots, x_{r_i} \rangle C_O(K^{r_i-r_{i-1}}), \quad (i \neq 1, k)$$

e,

$$\gamma_1 = r_1(a_1-2) - a_1+2, \quad \gamma_k = (n-r_{k-1})(a_k-2) - a_k+2,$$

$$\gamma_i = (r_i-r_{i-1})(a_i-2) - a_i+2 \quad (i \neq 1, k).$$

Seja $g \in m_{r_i-r_{i-1}}^{(r_i-r_{i-1})(a_i-2)+1}$ $(i \neq 1, k)$. Então, e-

xistem $g_1, \dots, g_{r_i-r_{i-1}} \in m_{r_i-r_{i-1}}^{\gamma_i}$, tal que,

$$\begin{aligned} g &= g_1 \partial_{r_{i-1}+1}(f_{a_i}) + \dots + g_{r_i-r_{i-1}} \partial_{r_i}(f_{a_i}) = \\ &= \sum_{j=1}^{r_i-r_{i-1}} g_j \partial_{r_{i-1}+j}(f_{a_i}) = \sum_{j=1}^{r_i-r_{i-1}} g_j \partial_{r_{i-1}+j}(f_{a_i+h}) - \\ &- \sum_{j=1}^{r_i-r_{i-1}} g_j \partial_{r_{i-1}+j}(h) \end{aligned}$$

Como $h \in m_n^{a_k+1}$ e $g_j \in m_{r_i-r_{i-1}}^{\gamma_i}$, segue que

$$\sum_{j=1}^{r_i-r_{i-1}} g_j \partial_{r_{i-1}+j}(h) \in m_n^{\gamma_i+a_k}$$

Por outro lado, $\gamma_i+a_k > \gamma_i+a_i = (r_i-r_{i-1})(a_i-2)+2$
($i \neq k$).

Portanto,

$$\begin{aligned} m_{r_i-r_{i-1}}^{(r_i-r_{i-1})(a_i-2)+1} &\subset m_{r_i-r_{i-1}}^{\gamma_i} \langle \partial(f_{a_i}+h) \rangle + \\ &+ m_n^{(r_i-r_{i-1})(a_i-2)+2} \quad \text{se } i \neq 1, k. \end{aligned}$$

Analogamente, temos

$$m_{r_1}^{r_1(a_1-2)+1} \subset m_{r_1}^{\gamma_1} \langle \partial(f_{a_1}+h) \rangle + m_n^{r_1(a_1-2)+2}$$

$$\begin{aligned} e \quad m_{n-r_{k-1}}^{(n-r_{k-1})(a_k-2)+1} &\subset m_{n-r_{k-1}}^{\gamma_k} \langle \partial(f_{a_k}+h) \rangle + \\ &+ m_n^{(n-r_{k-1})(a_k-2)+2} \end{aligned}$$

Seja $p \in m_n^{\sigma+1} - m_n^{\sigma+2}$ um monômio dado por:

$$p = x_1^{s_1} \dots x_{r_1}^{s_{r_1}} x_{r_1+1}^{s_{r_1+1}} \dots x_{r_2}^{s_{r_2}} \dots x_{r_{k-1}+1}^{s_{r_{k-1}+1}} \dots x_n^{s_n}$$

$$(\because \sum_{j=1}^n s_j = \sigma + 1).$$

Então, temos:

$$s_1 + \dots + s_{r_1} \geq r_1(a_1-2)+1$$

ou $s_{r_{k-1}+1} + \dots + s_n \geq (n-r_{k-1})(a_k-2)+1,$

ou $s_{r_{i-1}+1} + \dots + s_{r_i} \geq (r_i-r_{i-1})(a_i-2)+1,$ para algum

$$i = 2, \dots, k-1$$

Suponhamos que exista $j \in \{2, 3, \dots, k-1\}$, tal que

$$s_{r_{j-1}+1} + \dots + s_{r_j} \geq (r_j-r_{j-1})(a_j-2)+1$$

Então,

$$x_{r_{j-1}+1}^{s_{r_{j-1}+1}} \dots x_{r_j}^{s_{r_j}} \in m_{r_j-r_{j-1}}^{\gamma_j+b} \langle \partial(f_{a_j}+h) \rangle + \\ + m_n^{(r_j-r_{j-1})(a_j-2)+2+b},$$

onde $b = (s_{r_{j-1}+1} + \dots + s_{r_j}) - [(r_j-r_{j-1})(a_j-2)+1]$

Portanto, $p \in m_n^{\gamma_j+b+a} \langle \partial(f_{a_j}+h) \rangle + m_n^{\sigma+2},$ onde

$$a = (\sigma+1) - (s_{r_{j-1}+1} + \dots + s_{r_j})$$

e $\gamma_j = (r_j-r_{j-1})(a_j-2)-a_j+2.$

Daí concluímos que $p \in m_n^{(\sigma+1)-(a_j-1)} \langle \partial(f_{a_j}+h) \rangle + \\ + m_n^{\sigma+2}.$

Portanto,

$$m_n^{\sigma+1} \subset m_n^{(\sigma+1)-(a_k-1)} \langle \partial f, f \rangle + m_n^{\sigma+2},$$

pois $2 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_k$. Pela semi-bom-decomposição de f , segue que $\alpha(f) = \sigma+1$, $\beta(f) = (\sigma+1)-(a_k-1)$ e $\lambda_0 = a_k-1$.

Segue por (1.14) que $i_{\lambda_0} \neq 0$ e $i_{\lambda_0+1} = 0$.

2.4. OBSERVAÇÕES: λ_0 é um invariante para equivalência estável.

2.5. COROLÁRIO: Seja $f \in m_n^2 \subset C_0(K^n)$.

Se f admitir uma semi-bom-decomposição, então, λ_0 divide $\mu(f)$.

2.6. OBSERVAÇÕES: Seja $f \in C_0(K^2)$, $f(x,y) = x^3 + xy^3$. Neste caso temos $\mu(f) = 7$ e $\lambda_0 = 4$. Portanto, a hipótese de semi-bom-decomposição de f ,   indispensável para (2.5).

  3. Alguns Invariantes Diferenciáveis

Vamos introduzir mais alguns invariantes diferenciáveis, com os quais, para certas classes de germes, podemos dar condições necessárias e suficientes para a decomposição completa.

Antes porém, lembremos que se $\psi \in R$ (ou $\tilde{R}$), então ψ induz um R -isomorfismo (C -isomorfismo) de álgebras

$$\psi_* : C_0(R^n) \rightarrow C_0(R^n) \quad (C_0(C^n) \rightarrow C_0(C^n)),$$

definido por $\psi_*(f) = f \circ \psi$. Reciprocamente, dado

$$\psi : C_0(R^n) \rightarrow C_0(R^n) \quad (C_0(C^n) \rightarrow C_0(C^n))$$

um R -isomorfismo (C -isomorfismo) de álgebras, então existe $\psi \in R$ ($\psi \in \tilde{R}$), tal que, $\psi_* = \psi$.

Seja $I \subset m_n \subset C_O(K^n)$ um ideal de K -codimensão finita.

3.1. DEFINIÇÃO: $\alpha(I) = \min\{\alpha \in \mathbb{N} : m_n^\alpha \subset I\}$;

$$\beta(I) = \max\{\beta \in \mathbb{N} : m_n^{\alpha(I)} \subset m_n^\beta I\} \quad e,$$

$$\lambda_O(I) = \alpha(I) - \beta(I).$$

3.2. OBSERVAÇÕES: (1) Se $I = \langle \partial f, f \rangle$, segue de (2.1) que

$$\lambda_O(f) = \lambda_O(I).$$

(2) Da mesma forma como em (2.2), demonstra-se que $\alpha(I)$, $\beta(I)$ e portanto $\lambda_O(I)$, são invariantes diferenciáveis. Lembremos apenas que para simplificar tais demonstrações, podemos tomar I finitamente gerado pois, $\text{cod}_K I < \infty$ (Mather [17]).

Demonstremos agora um Lema, o qual para o caso formal, encontra-se em ([18]).

3.3. LEMA: Sejam $I \subset m_n \subset C_O(K^n)$ um ideal, com

$$I = \langle f_1, \dots, f_p \rangle, \quad e \quad \psi \in R \quad (\text{ou } \tilde{R}).$$

$$\text{Então, } \psi_* \delta I = \delta \psi_* I.$$

Demonstração: Sendo $I = \langle f_1, \dots, f_p \rangle$, segue que

$$\psi_* I = \langle f_1 \circ \psi, \dots, f_p \circ \psi \rangle.$$

Logo, posto $I = \text{posto } \psi_* I = r$. Então, $\delta I = I + I_{r+1}$ e $\delta \psi_* I = \psi_* I + (\psi_* I)_{r+1}$, onde I_{r+1} e $(\psi_* I)_{r+1}$ são os ideais gerados pelos menores $(r+1) \times (r+1)$ das matrizes

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right) \quad e \quad \left(\frac{\partial (f_i \circ \psi)}{\partial x_j} \right), \quad \text{respectivamente.}$$

Se $r = n$ ou $r = p$, segue que $I_{r+1} = (\psi_* I)_{r+1} = 0$,
e portanto, $\psi_* \delta I = \delta \psi_* I$.

Suponhamos $r < n, p$.

Consideremos o seguinte menor $(r+1) \times (r+1)$ de

$$\left(\frac{\partial (f_i \circ \psi)}{\partial x_j} \right):$$

$$A = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial (f_1 \circ \psi)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial (f_1 \circ \psi)}{\partial x_{r+1}} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial (f_{r+1} \circ \psi)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial (f_{r+1} \circ \psi)}{\partial x_{r+1}} \end{bmatrix}$$

Seja $\{e_1, \dots, e_n\}$ a base canônica de K^n . Então,

$$\frac{\partial (f_j \circ \psi)}{\partial x_i}(x) = (f_j \circ \psi)'(x) e_i = \left[\sum_{k=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial y_k} \left(\frac{\partial \psi_k}{\partial x_i} \circ \psi^{-1} \right) \right] \circ \psi(x),$$

onde $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_n)$. Logo,

$$\frac{\partial (f_j \circ \psi)}{\partial x_i} = \psi_* \left(\sum_{k=1}^n \alpha_{ki} \frac{\partial f_j}{\partial y_k} \right),$$

onde $\alpha_{ki} = \frac{\partial \psi_k}{\partial x_i} \circ \psi^{-1}$.

Sendo ψ_* um K -isomorfismo de álgebras, segue que:

$$A = \psi_* \det \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^n \alpha_{k1} \frac{\partial f_1}{\partial x_k} & \dots & \sum_{k=1}^n \alpha_{k,r+1} \frac{\partial f_1}{\partial x_k} \\ \dots & \dots & \dots \\ \sum_{k=1}^n \alpha_{k1} \frac{\partial f_{r+1}}{\partial x_k} & \dots & \sum_{k=1}^n \alpha_{k,r+1} \frac{\partial f_{r+1}}{\partial x_k} \end{bmatrix} =$$

$$= \psi_* \alpha \det \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_{r+1}} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_{r+1}}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_{r+1}}{\partial x_{r+1}} \end{bmatrix}, \text{ onde } \alpha \in C_O(K^n).$$

Portanto, $\psi_* I_{r+1} = (\psi_* I)_{r+1}$, e então, $\psi_* \delta I = \delta \psi_* I$.

3.4. OBSERVAÇÕES: O Lema (3.3) continua verdadeiro mesmo que $I \subset m_n$ não seja finitamente gerado.

3.5. DEFINIÇÃO: Para $I \subset m_n \subset C_O(K^n)$, um ideal de K-codimensão finita, definimos as seqüências:

$$\tilde{\alpha}(I) = (\alpha(I), \alpha(\delta I), \dots, \alpha(\delta^k I), \dots);$$

$$\tilde{\beta}(I) = (\beta(I), \beta(\delta I), \dots, \beta(\delta^k I), \dots) \text{ e}$$

$$\tilde{\lambda}(I) = (\lambda_O(I), \lambda_O(\delta I), \dots, \lambda_O(\delta^k I), \dots),$$

e os números:

$$\rho(I) = \min\{k \in \mathbb{N} : \delta^k I = m_n^\theta, \text{ para algum } \theta \in \mathbb{N}\},$$

e,

$$\eta(I) = \min\{k \in \mathbb{N} : \delta^k I = m_n\}.$$

No caso de $I = \langle \partial f, f \rangle$, $f \in m_n^2$, denotaremos tais elementos por $\tilde{\alpha}(f)$, $\tilde{\beta}(f)$, $\tilde{\lambda}(f)$, $\rho(f)$ e $\eta(f)$, respectivamente.

3.6. OBSERVAÇÕES: Como consequência de (3.2) e (3.3), temos que os elementos introduzidos em (3.5), são invariantes diferenciáveis.

3.7. PROPOSIÇÃO: Seja $I \subset m_2 \subset C_0(K^2)$, um ideal de K-codimensão finita. Sejam $\alpha(I) = a$ e $\beta(I) = b$, tais que, $m_2^{a-i} \subset m_2^{b+i} I$ e $m_2^{a-i} \not\subset m_2^{b+1+i} I$, para cada $i = 0, 1, \dots, \eta(I)$.

Então, $i_{\lambda_0-1} \neq 0$ e $i_{\lambda_0} = 0$, onde

$$B(I) = \sum i_1 i_2 \dots$$

Demonstração: Sendo I um ideal de $C_0(K^2)$, $I \subset m_2$, com K-codimensão finita, segue de ([14]) que $B(I)$ tem uma das seguintes formas: $\sum_1 \dots 1 0$, $\sum_2 \dots 2 0$ ou $\sum_2 \dots 2 1 \dots 1 0$.

Seja $B(I) = \sum \underbrace{1 \dots 1}_d 0$. Então, I é equivalente ao ideal $\langle x, y^{d+1} \rangle$. Portanto, $\alpha(I) = d+1$, $\beta(I) = 0$, $\lambda_0(I) = d+1$, e então, $i_{\lambda_0-1} \neq 0$ e $i_{\lambda_0} = 0$.

Seja $B(I) = \sum \underbrace{2 \dots 2}_d 0$. Então, $\eta(I) = d$. Por hipótese, temos que $m_2^{a-d} \subset m_2^{b+d} I$ ($\delta^d I = m_2$) e $m_2^{a-d} \not\subset m_2^{b+1} m_2$. Portanto, $a-d = b+1$, e então, $\lambda_0 = a-b = d+1$. Disto segue que, $i_{\lambda_0-1} \neq 0$ e $i_{\lambda_0} = 0$.

Seja $B(I) = \sum \underbrace{2 \dots 2}_r \underbrace{1 \dots 1}_s 0$. Logo, $r < \eta(I)$.

Por hipótese temos $m_2^{a-r} \subset m_2^{b+r} I$ e $m_2^{a-r} \not\subset m_2^{b+1+r} I$. Temos também que $\delta^r I$ é equivalente ao ideal $\langle x, y^{s+1} \rangle$. Então, $m_2^{a-r} \subset m_2^{b+s+1} \langle x, y^{s+1} \rangle$ e $m_2^{a-r} \not\subset m_2^{b+1+s+1} \langle x, y^{s+1} \rangle$. Disto segue que $a-r = b+s+1$, e então, $\lambda_0 = a-b = r+s+1$.

Portanto, $i_{\lambda_0-1} \neq 0$ e $i_{\lambda_0} = 0$.

3.8. COROLÁRIO: Seja $f \in m_n^2 \subset C_0(K^n)$ com $\mu(f) < \infty$, cuja característica da matriz Hessiana em $0 \in K^n$ é $n-1$ ou $n-2$. Se para cada $i = 1, 2, \dots, \eta(\langle \partial f, f \rangle)$, tivermos $m_n^{\alpha(f)-i} \subset m_n^{\beta(f)} \delta^i \langle \partial f, f \rangle$ e $m_n^{\alpha(f)-i} \not\subset m_n^{\beta(f)+1} \delta^i \langle \partial f, f \rangle$, então, $i_{\lambda_0} \neq 0$ e $i_{\lambda_0+1} = 0$.

3.9. COROLÁRIO: Seja $f \in m_n^2 \subset C_0(K^n)$, com $\mu(f) < \infty$. Se para algum $i_0 = 1, 2, \dots, \eta(\langle \partial f, f \rangle)$, tivermos $m_n^{\alpha(f)-i_0} \subset m_n^{\beta(f)+1} \delta^{i_0} \langle \partial f, f \rangle$, então, f não se decompõe completamente.

3.10. DEFINIÇÃO: Seja $I \subset m_n \subset C_0(K^n)$ um ideal. Definimos a seqüência $g(I) = (g_1, g_2, \dots)$ onde g_i é o número minimal de geradores de $\delta^{i-1}I$. No caso $I = \langle \partial f, f \rangle$, denotaremos $g(I) = g(f)$.

3.11. OBSERVAÇÕES: Por (3.3) temos que $g(I)$ é um invariante diferenciável.

3.12. LEMA: Seja $f \in m_n^2$, com $\mu(f) < \infty$ e $n \geq 2$. Então, $\rho(f) = \eta(f)$ e $g(f)$ constante, são condições necessárias para a decomposição completa de f .

3.13. EXEMPLOS: Seja $f \in C_0(K^2)$, $f(x, y) = x^4 + y^4 + x^2 y^2$. Logo, $\langle \partial f, f \rangle = \langle 2x^3 + xy^2, 2y^3 + x^2 y \rangle$, $\delta \langle \partial f, f \rangle = \langle x^2, y^2, xy \rangle = m_2^2$. Portanto, $\rho(f) = 1$, $\eta(f) = 2$ e $g(f) = (2, 3, 2, 2, \dots)$.

Como $\mu(f) = 9$, segue que as hipóteses de (3.12) não são condições necessárias para a semi-bom-decomposição de f . Tomando $h \in C_0(K^2)$, $h(x,y) = x^3 + xy^3$, temos $\rho(h) = \eta(h) = 2$, $g(h) = (2, 2, \dots)$ e $\mu(h) = 7$. Portanto, as condições de (3.12) não são suficientes para a decomposição completa de h .

§ 4. *Uma Condição Necessária para a Decomposição de um Germe em Duas Variáveis*

Sejam $f \in m_n^2 \subset C_0(K^n)$, com $\mu(f) < \infty$ e as seqüências $\tilde{\alpha}(f) = (\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}, 1, 1, \dots)$ e $\tilde{\beta}(f) = (\beta_1, \dots, \beta_{k-1}, 0, \dots)$, com $\alpha_{k-1} \geq 2$.

Consideremos

$$S(f) = \{(\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2), \dots, (\alpha_{k-1}, \beta_{k-1}), (1, 0)\} \subset N^2.$$

Então, $\eta(f) = \text{cardinalidade de } S(f) - 1$.

4.1. DEFINIÇÃO: $R(f)$ é o menor convexo do R^2 , contendo $S(f)$ e $\{(0,0), (0, \beta_1), \dots, (0, \beta_{k-1})\}$. Denotemos por $A(f)$ a área da região $R(f)$.

4.2. OBSERVAÇÕES: $S(f)$ e portanto $A(f)$, são invariantes diferenciáveis.

4.3. PROPOSIÇÃO: Seja $f \in m_n^2 \subset C_0(K^n)$, com $\mu(f) < \infty$, e característica da matriz Hessiana em $0 \in K^n$, maior ou igual a $n-2$.
Então, se f se decompõe completamente, teremos $A(f) + \eta(f) = \mu(f) - 1$.

Demonstração: Seja $K = \mathbb{C}$.

Se a característica da matriz Hessiana em $0 \in \mathbb{C}^n$ for n , então f é um germe de Morse. Portanto, $S(f) = \{(1, 0)\}$, e então, $A(f) = 0$, $\eta(f) = 0$ e $\mu(f) = 1$.

Se a característica for $n-1$, segue que f é equivalente a um germe da forma $x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 + x_n^k$, com $k \geq 3$. Sendo $\langle \partial f, f \rangle$ equivalente a $\langle x_1, \dots, x_{n-1}, x_n^{k-1} \rangle$, tem-se $\tilde{\alpha}(f) = \{k-1, k-2, \dots, 1, 1, \dots\}$ e $\tilde{\beta}(f) = (0, \dots)$. Logo, $A(f) = 0$, $\eta(f) = k-2$ e $\mu(f) = k-1$.

Suponhamos que a característica da matriz Hessiana de f em $0 \in K^n$ é $n-2$. Do fato de f se decompor completamente, segue que f é equivalente a um germe da forma $x_1^2 + \dots + x_{n-2}^2 + x_{n-1}^a + x_n^b$, com $3 \leq a \leq b$.

Para computarmos $\tilde{\alpha}(f)$ e $\tilde{\beta}(f)$, é suficiente computarmos $\tilde{\alpha}(g)$ e $\tilde{\beta}(g)$, onde $g = g(x, y) = x^a + y^b$.

Nestas condições, considerando $I = \langle \partial g, g \rangle$, tem-se:

$$m_2^{a+b-3} \subset m_2^{a-2} \langle x^{a-1}, y^{b-1} \rangle, \text{ onde } \alpha(I) = a+b-3 \text{ e } \beta(I) = a-2$$

$$m_2^{a+b-5} \subset m_2^{a-3} \langle x^{a-2}, y^{b-2} \rangle, \text{ onde } \alpha(\delta I) = a+b-5 \text{ e } \beta(\delta I) = a-3$$

.....

$$m_2^{b-a+3} \subset m_2 \langle x^2, y^{b-a+2} \rangle, \text{ onde } \alpha(\delta^{a-3} I) = b-a+3 \text{ e } \beta(\delta^{a-3} I) = 1$$

$$m_2^{b-a+1} \subset \langle x, y^{b-a+1} \rangle, \text{ onde } \alpha(\delta^{a-2} I) = b-a+1 \text{ e } \beta(\delta^{a-2} I) = 0$$

.....

$$m_2^2 \subset \langle x, y^2 \rangle, \text{ onde } \alpha(\delta^{b-3} I) = 2 \text{ e } \beta(\delta^{b-3} I) = 0$$

Disto concluímos que:

$$S(g) = \begin{cases} \{(1,0), (3,1), \dots, (2k-1, k-1), \dots, (2a-3, a-2)\}, & \text{se } a=b \geq 3 \\ \{(1,0), (2,0), \dots, (b-a+1, 0), (b-a+3, 1), \dots, \\ \dots, (b-a+2k-1, k-1), \dots, (a+b-3, a-2)\}, & \text{se } 3 \leq a < b \end{cases}$$

Então, temos:

(i) Caso $a = b \geq 3$.

$$\eta(g) = a-2, \quad A(g) = \frac{(2a-3)+1}{2}(a-2) = (a-1)(a-2)$$

$$\text{Logo, } A(g) + \eta(g) = (a-2)a = (a-1)^2 - 1 = \mu(g) - 1$$

(ii) Caso $3 \leq a < b$.

$$\eta(g) = (b-a+1) + (a-3) = b-2,$$

$$A(g) = \frac{(b-a+1) + (a+b-3)}{2}(a-2) = (b-1)(a-2)$$

$$\text{Portanto, } A(g) + \eta(g) = (a-1)(b-1) - 1 = \mu(g) - 1.$$

Para o caso $K = \mathbb{R}$, a demonstração é análoga.

4.4. OBSERVAÇÕES: Seja $f \in C_0(K^3)$, com $f(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3$.

Neste caso temos $\tilde{\alpha}(f) = (4, 1, 1, \dots)$ e $\tilde{\beta}(f) = (2, 0, \dots)$. Portanto, $A(f) = 5$, $\eta(f) = 1$ e $\mu(f) = 8$, donde $A(f) + \eta(f) \neq \mu(f) - 1$. Daí, concluímos que a proposição (4.3) é falsa se a característica da matriz Hessiana em $0 \in K^n$ for $\leq n-3$.

4.5. COROLÁRIO: Seja $f \in m_2^2 \subset C_0(K^2)$, com $\mu(f) < \infty$.

Se f admitir uma semi-bom-decomposição, então, $A(f) + \eta(f) = \mu(f) - 1$.

§ 5. Apêndice

Conforme Arnol'd ([5], pg. 8), até o presente estágio, a teoria das singularidades é uma *ciência experimental*.

Lembramos este registro de Arnol'd porque, neste parágrafo, apresentaremos alguns resultados parciais obtidos através de verificação direta.

Nossa expectativa é a de num futuro bem próximo, obtermos resultados mais completos para os tipos de problemas abordados.

Registremos também que os cálculos feitos, envolvem técnicas de vários autores ([1], [7], [12]).

Vamos agora apresentar os nossos resultados do parágrafo, um dos quais através do:

5.1. TEOREMA: Seja $f : C^{n,0} \rightarrow C, 0$ 0-modal.

Então, f se decompõe completamente, se e somente se, $i_{\lambda_0} \neq 0$ e $i_{\lambda_0+1} = 0$.

Demonstração: Conforme observamos em (2.4), λ_0 é um invariante para equivalência estável. Sendo f 0-modal, então, f é estavelmente equivalente a um dos seguintes germes:

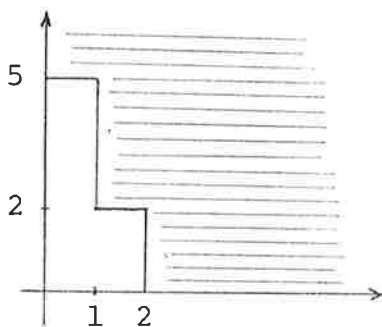
- (i) $x^2 + y^{k+1}$, $k \geq 1$, em $C_0(C^2)$;
- (ii) $x^3 + y^4$, em $C_0(C^2)$;
- (iii) $x^3 + y^5$, em $C_0(C^2)$;
- (iv) $x^3 + xy^3$, em $C_0(C^2)$, ou,
- (v) $x^2 + y^{k-1}$, $k \geq 4$, em $C_0(C^2)$

Para o caso (i), tem-se $\alpha(f) = k$, $\beta(f) = 0$ e portanto, $\lambda_0 = k$. Como $B_f = \sum_n \underbrace{1 \dots 1}_{k-1} 0$, segue que $i_{\lambda_0} \neq 0$

e $i_{\lambda_0+1} = 0$.

No caso (ii), tem-se $\alpha(f) = 4$, $\beta(f) = 1$, $\lambda_0 = 3$ e $B_f = \sum_n 2 \ 1 \ 0$. Logo, $i_{\lambda_0} \neq 0$ e $i_{\lambda_0+1} = 0$. Para o caso (iii), tem-se $\alpha(f) = 5$, $\beta(f) = 1$, $\lambda_0 = 4$, $B_f = \sum_n 2 \ 1 \ 1 \ 0$ e portanto, $i_{\lambda_0} \neq 0$ e $i_{\lambda_0+1} = 0$.

Para o caso (iv), como o ideal $J = \langle 3x^2+y^3, xy^2 \rangle_{C(C^2)}$, tem escada dada por:



segue que $\alpha(f) \geq 5$, uma vez que, $\alpha(f)$ (e também $\beta(f)$) é um invariante para equivalência estável. Como x^3+xy^3 é quase-homogênea não degenerada do tipo $(1; \frac{1}{3}, \frac{2}{9})$, segue que $d_{\max} = (1 - \frac{2}{3}) + (1 - \frac{4}{9}) = \frac{8}{9}$.

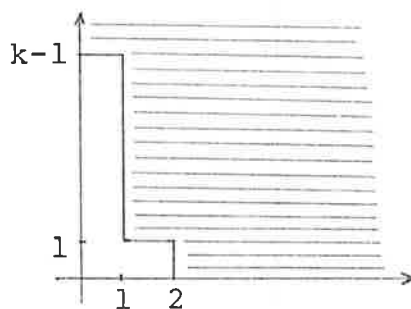
Seja $x^a y^b$, com $a+b \geq 5$. Então, $\frac{a}{3} + \frac{2b}{9} \geq \frac{2}{9}(a+b) \geq \frac{10}{9} > \frac{8}{9}$, donde se conclui que $m_2^5 \subset \langle f_1, f_1 \rangle$, onde $f_1(x,y) = x^3+xy^3$. Portanto, $\alpha(f) = 5$. Por outro lado, a ordem de qualquer elemento de $m_2^3 \langle 3x^2+y^3, xy^2 \rangle$ com relação aos pesos $(\frac{1}{3}, \frac{2}{9})$ é maior ou igual a $\frac{4}{3}$. De fato: seja $x^a y^b$, com $a+b \geq 3$. Então, $\frac{a}{3} + \frac{2b}{9} \geq \frac{6}{9}$. Como a ordem de $3x^2+y^3$ é $\frac{2}{3}$, e o grau de xy^2 é $\frac{7}{9}$, a nossa afirmação fica provada.

Sendo o grau de y^5 , igual a $\frac{10}{9} < \frac{12}{9}$, concluímos que $\beta(f) \leq 2$. Por verificação direta, segue que:

$$m_2^5 \notin m_2^2 \langle \partial f_1, f_1 \rangle \quad \text{e} \quad m_2^5 \subset m_2 \langle \partial f_1, f_1 \rangle.$$

Portanto, $\alpha(f) = 5$, $\beta(f) = 1$, $\lambda_0 = 4$ e $B_f = \sum_n 2 \ 1 \ 0$,
 donde $i_{\lambda_0} = 0$.

Para o caso (v), como $I = \langle xy, x^2 + (k-1)y^{k-2} \rangle_{C_0(C^2)}$ tem
 escada dada por:



segue que $\alpha(f) \geq k-1$. Mas, $y^{k-2} \notin I$ e $m_2^{k-1} \subset I$, donde
 se conclui que $\alpha(f) = k-1$.

Como $y^{k-1} \notin m_2^2 I$, segue que $\beta(f) \leq 1$. Por outro
 lado, tem-se $m_2^{k-1} \subset m_2 I$, donde segue que, $\alpha(f) = k-1$,
 $\beta(f) = 1$, $\lambda_0 = k-2$ e $B_f = \sum_n 2 \ 0$.

Se $k = 4$, tem-se $i_{\lambda_0} \neq 0$ e $i_{\lambda_0+1} = 0$, e neste
 caso, sabemos que f se decompõe completamente ($K = C$).

Se $k \geq 5$, tem-se $i_{\lambda_0} = 0$

5.2. OBSERVAÇÕES: (1) Na demonstração de (5.1), caso (iv), po-
 deríamos ter calculado $\beta(f)$ diretamen-
 te como em (v). Registremos porém, que o que foi feito não foi
 uma ingenuidade, mas sim, o registro de uma técnica para uma
 limitação superior de $\beta(f)$;

(2) o Teorema (5.1), continua verdadeiro pa-
 ra o caso $K = R$, excluindo o caso de
 f ser equivalente a $\sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i^2 + x_{n-1}^2 x_n - x_n^3$, $\varepsilon_i = \pm 1$.

5.3. COROLÁRIO: Seja $f \in m_n^2 \subset C_0(\mathbb{R}^n)$, 0-modal.

Então, f admite uma semi-bom-decomposição, se e somente se, $i_{\lambda_0} \neq 0$ e $i_{\lambda_0+1} = 0$.

Uma análise das singularidades 1-modais:

Afim de facilitar nossos cálculos, demonstremos um lema técnico:

5.4. LEMA: Seja $f \in m_n^2 \subset C_0(K^n)$, tal que, $f(x) = \psi_1(x) + \dots + \dots + \psi_r(x) + \psi_{r+1}(x)$, onde $\psi_1, \dots, \psi_{r+1}$ são monômios em $x_1, \dots, x_n$, e, $x = (x_1, \dots, x_n)$. Suponhamos que $\psi_1 + \dots + \psi_r$ é quase-homogêneo do tipo $(d; \alpha_1, \dots, \alpha_n)$.

Se grau de ψ_{r+1} for diferente de d , com relação aos pesos $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, então, $\langle \partial f, f \rangle = \langle \partial f, \psi_{r+1} \rangle$.

Demonstração: Temos $\partial_i f = \partial_i (\psi_1 + \dots + \psi_r) + \partial_i \psi_{r+1}$, $i = 1, \dots, n$. Sendo $\psi_1 + \dots + \psi_r$ quase-homogêneo do tipo $(d; \alpha_1, \dots, \alpha_n)$, segue por (I - § 6) que

$$\alpha_1 x_1 \partial_1 (\psi_1 + \dots + \psi_r) + \dots + \alpha_n x_n \partial_n (\psi_1 + \dots + \psi_r) = d(\psi_1 + \dots + \psi_r).$$

Seja $\psi_{r+1} = a x_1^{s_1} \dots x_n^{s_n}$, onde $a \in K$ e $s_1, \dots, s_n$ são inteiros não negativos. Logo,

$$\begin{aligned} \alpha_1 x_1 \partial_1 \psi_{r+1} + \dots + \alpha_n x_n \partial_n \psi_{r+1} &= \\ &= (\alpha_1 s_1 + \dots + \alpha_n s_n) \psi_{r+1} \end{aligned}$$

onde grau $\psi_{r+1} = \alpha_1 s_1 + \dots + \alpha_n s_n$ (com relação aos pesos $\alpha_1, \dots, \alpha_n$).

Portanto, $\alpha_1 x_1 \partial_1 f + \dots + \alpha_n x_n \partial_n f = d(\psi_1 + \dots + \psi_r) + (\alpha_1 s_1 + \dots + \alpha_n s_n) \psi_{r+1}$, e então,

$$\begin{aligned} & \alpha_1 x_1 \partial_1 f + \dots + \alpha_n x_n \partial_n f - df = \\ & = (\alpha_1 s_1 + \dots + \alpha_n s_n - d) \psi_{r+1} \end{aligned}$$

Como por hipótese $\alpha_1 s_1 + \dots + \alpha_n s_n \neq d$, segue que $\psi_{r+1} \in \langle \partial f, f \rangle$, donde, $\langle \partial f, \psi_{r+1} \rangle \subset \langle \partial f, f \rangle$.

Sendo $d \neq 0$, segue que $\langle \partial f, f \rangle \subset \langle \partial f, \psi_{r+1} \rangle$ e portanto, $\langle \partial f, f \rangle = \langle \partial f, \psi_{r+1} \rangle$.

Com as notações acima, temos o:

5.5. COROLÁRIO: Se para cada $i = 1, \dots, r+1$, $\psi_1 + \dots + \psi_{i-1} + \psi_{i+1} + \dots + \psi_{r+1}$ for quase-homogêneo do tipo $(d_i; \alpha_1^i, \dots, \alpha_n^i)$, com grau $\psi_i \neq d_i$ (com relação aos pesos $\alpha_1^i, \dots, \alpha_n^i$), então, $\psi_1, \dots, \psi_{r+1} \in \langle \partial f, f \rangle$. Além disso, $\langle \partial f, f \rangle = \langle \partial f, \psi_i \rangle$, $i = 1, \dots, r+1$.

Seja $f : \mathbb{C}^n, 0 \rightarrow \mathbb{C}, 0$ uma singularidade 1-modal. Então, por Arnol'd ([3], [5]), $f \in m_n^2$ e a característica da matriz Hessiana em $0 \in \mathbb{C}^n$, é $n-2$ ou $n-3$.

De acordo com os referidos artigos, com exceção da singularidade $T_{p,q,r}$ (a qual descreveremos abaixo), todas são equivalentes a singularidades semi-quase-homogêneas, e são denotadas por certas letras latinas maiúsculas munidas de um índice, o qual representa a multiplicidade algébrica do germe, (isto é, μ).

Na tabela abaixo, apresentamos tais singularidades na forma $f_0 + f_1$ com os respectivos tipos (conforme I - § 6).

T A B E L A

Singularidade	$(d; \alpha)$	f_0	f_1	grau (f_1)
K_{12}	$(21; 7, 3)$	$x^3 + y^7$	axy^5	22 se $a \neq 0$
K_{13}	$(15; 5, 2)$	$x^3 + xy^5$	ay^8	16 se $a \neq 0$
K_{14}	$(24; 8, 3)$	$x^3 + y^8$	axy^6	26 se $a \neq 0$
Z_{11}	$(15; 4, 3)$	$x^3y + y^5$	axy^4	16 se $a \neq 0$
Z_{12}	$(11; 3, 2)$	$x^3y + xy^4$	ax^2y^3	12 se $a \neq 0$
Z_{13}	$(18; 5, 3)$	$x^3y + y^6$	axy^5	20 se $a \neq 0$
W_{12}	$(20; 5, 4)$	$x^4 + y^5$	ax^2y^3	22 se $a \neq 0$
W_{13}	$(16; 4, 3)$	$x^4 + xy^4$	ay^6	18 se $a \neq 0$
$J_{10} (4a^3 + 27 \neq 0)$	$(6; 2, 1)$	$x^3 + y^6 + ax^2y^2$	0	∞
$X_9 (a^2 \neq 4)$	$(4; 1, 1)$	$x^4 + y^4 + ax^2y^2$	0	∞
$P_8 (a^3 + 27 \neq 0)$	$(3; 1, 1, 1)$	$x^3 + y^3 + z^3 + axyz$	0	∞
Q_{10}	$(24; 8, 6, 9)$	$x^3 + y^4 + yz^2$	axy^3	26 se $a \neq 0$
Q_{11}	$(18; 6, 7, 4)$	$x^3 + y^2z + xz^3$	az^5	20 se $a \neq 0$
Q_{12}	$(15; 5, 3, 6)$	$x^3 + y^5 + yz^2$	axy^4	17 se $a \neq 0$
S_{11}	$(16; 4, 5, 6)$	$x^4 + y^2z + xz^2$	ax^3z	18 se $a \neq 0$
S_{12}	$(13; 4, 5, 3)$	$x^2y + y^2z + xz^3$	az^5	15 se $a \neq 0$
U_{12}	$(12; 4, 4, 3)$	$x^3 + y^3 + z^4$	$axyz^2$	14 se $a \neq 0$

E, finalmente, temos $T_{p,q,r} : x^p + y^q + z^r + axyz$, $a \neq 0$,

$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} < 1$. Com exceção de $T_{p,q,r}$, segue facilmente de

(I - 6.3) que $\mu(M_j) = j$.

Nossos resultados para singularidades 1-modais, são dados pelos seguintes teoremas:

5.6. TEOREMA: Seja $f \in m_n \subset C_0(C^n)$ 1-modal.

Então, f admite uma boa-decomposição, se e somente se, $i_{\lambda_0} \neq 0$ e $i_{\lambda_0+1} = 0$.

5.7. TEOREMA: Seja $f \in m_n \subset C_0(C^n)$ 1-modal, não estavelmente equivalente a uma singularidade homogênea.

Então, f se decompõe completamente, se e somente se, $i_{\lambda_0} \neq 0$ e $i_{\lambda_0+1} = 0$.

Demonstração: Inicialmente, computemos λ_0 e μ para a família $T_{p,q,r}$. Para tal, seja $f_a = x^p + y^q + z^r + axyz$, com $a \neq 0$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} < 1$.

(i) Caso $p = 2, q = 3, r \geq 7$

Temos

$$\langle \partial f_a \rangle = \langle 2x + ayz, 3y^2 + axz, rz^{r-1} + axy \rangle$$

Tomando a mudança de coordenadas dada por:

$$\begin{cases} X = 2x + ayz \\ Y = y \\ Z = z \end{cases}$$

segue que $\langle \partial f_a \rangle$ é equivalente ao ideal

$$\langle x, 6y^2 - a^2 yz^2, 2rz^{r-1} - a^2 y^2 z \rangle$$

Por Krushinireenko ([12]), segue que

$$\begin{aligned} \mu(f_a) &= \text{cod}_C \langle x, y, z^{r-1} \rangle + \text{cod}_C \langle x, y, z \rangle + \\ &+ \text{cod}_C \langle x, 6y-a^2z^2, 2rz^{r-2}-a^2y^2 \rangle = r + \\ &+ \text{cod}_C \langle x, 6y-a^2z^2, 2rz^{r-2}-a^2y^2 \rangle \end{aligned}$$

Tomando a mudança de coordenadas dada por

$$\psi : \begin{cases} X = x \\ Y = 6y-a^2z^2 \\ Z = z \end{cases}$$

teremos $\langle x, 6y-a^2z^2, 2rz^{r-2}-a^2y^2 \rangle$ equivalente ao ideal $\langle x, y, z^4 \rangle$ pois $a \neq 0$ e $r-2 \geq 5$. Logo, $\mu(f_a) = r+4$.

Por outro lado temos $B_{f_a} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Por (5.4), segue que $\langle \partial f_a, f_a \rangle = \langle \partial f_a, xyz \rangle$. Via ψ , $\langle \partial f_a, f_a \rangle$ é equivalente ao ideal

$$I = \langle x, 6y^2-a^2yz^2, 2rz^{r-1}-a^2y^2z, y^2z^2 \rangle$$

Como

$$\begin{aligned} yz^{r-1} &= \frac{1}{2r}y(2rz^{r-1}-a^2y^2z) + \frac{a^2}{12r}yz(6y^2-a^2yz^2) + \\ &+ \frac{a^4}{12r}z(y^2z^2) \end{aligned}$$

$$z^r = \frac{1}{2r}z(2rz^{r-1}-a^2y^2z) + \frac{a^2}{2r}y^2z^2$$

$$\text{e } z^{r-1} \notin I$$

segue que $m_3^{r-1} \notin \langle \partial f_a, f_a \rangle$ e $m_3^r \subset \langle \partial f_a, f_a \rangle$, donde

$\alpha(f_a) = r$. Facilmente se verifica que $m_3^r \not\subset m_3 I$, e então,

$\beta(f_a) = 0$. Logo, $\lambda_o = r \geq 7$, donde $i_{\lambda_o} = 0$. Disto segue que $T_{2,3,r}$ ($r \geq 7$) não admite uma semi-b $\bar{o}$ a-decomposição, e em particular, não se decompõe completamente (a não decomposição completa, pode também ser comprovada pelo fato de termos $B_f = \Sigma_1 1 1 1 0 + \Sigma_1 1 0 + \Sigma_1 0$. Logo, se ela decompusesse completamente, teríamos $\mu = 8 < r+4$ pois $r \geq 7$, o que é um absurdo).

(ii) Caso $p = 2, q = 4$ e $r \geq 5$.

Com técnicas análogas, temos $\mu(f_a) = r+5$, $\alpha(f_a) = r$, $\beta(f_a) = 0$ e portanto, $\lambda_o = r$. Como $B_{f_a} = \Sigma_3 2 2 0$, segue que $i_{\lambda_o} = 0$ pois $r \geq 5$.

Temos portanto que f_a não admite uma semi-b $\bar{o}$ a-decomposição. (Neste caso, o método da decomposição do símbolo de Boardman é eficiente, uma vez que, $B_{f_a} = \Sigma_1 1 1 1 0 + \Sigma_1 1 1 0 + \Sigma_1 0$. Portanto, se f_a se decompor completamente, tem-se $\mu(f_a) = 9 < r+5$ pois $r \geq 5$, o que é uma contradição).

(iii) Caso $p = 2, q \geq 5, r \geq 5$.

De maneira análoga, mostra-se que $\mu(f_a) = r + q + 1$, $\alpha(f_a) = r$, $\beta(f_a) = 0$ e portanto, $\lambda_o = r$. Como $B_{f_a} = \Sigma_3 2 2 0$, segue que $i_{\lambda_o} = 0$ ($r \geq 5$). Então, f_a não admite uma semi-b $\bar{o}$ a-decomposição.

(iv) Caso $3 \leq p \leq q \leq r, r \geq 4$.

Por ([5]) temos que $\mu(f_a) = p + q + r - 1$. Com técnicas análogas às anteriores, mostra-se que $\alpha(f_a) = r$, $\beta(f_a) = 0$ e portanto, $\lambda_o = r$. Como $B_{f_a} = \Sigma_3 3 0$ segue que $i_{\lambda_o} = 0$ e

portanto, que f_a não admite uma semi-bom-decomposição. (Tanto neste caso como em (iii), o método da decomposição do símbolo de Boardman é eficiente para detectar a não decomposição completa de f_a).

Façamos agora o cálculo de λ_0 e i_{λ_0} para as demais singularidades:

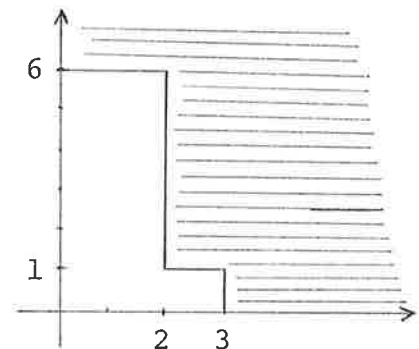
$$(1) Z_{13} : f_a = x^3y + y^6 + axy^5, \quad a \in \mathbb{C}.$$

Como $\mu(Z_{13}) = 13$ (primo), segue que f_a não admite uma semi-bom-decomposição, para todo $a \in \mathbb{C}$.

Para $a = 0$, tem-se

$$\langle \partial f_0, f_0 \rangle = \langle \partial f_0 \rangle = \langle x^2y, x^3+6y^5 \rangle$$

A escada de $\langle \partial f_0 \rangle$ é dada por:



Portanto, $xy^5 \notin \langle \partial f_0 \rangle$, e então, $\alpha(f_0) \geq 7$. Facilmente se mostra que $m_2^7 \subset \langle \partial f_0 \rangle$, donde, $\alpha(f_0) = 7$.

Computemos agora $\beta(f_0)$:

Fixemos 2 como peso para x e 1 como peso para y . Com relação a tais pesos temos que, $\text{ordem}(x^2y) = 5$ e $\text{ordem}(x^3+6y^5) = 5$. Portanto, se $h \in \langle x^2y, x^3+6y^5 \rangle$, segue que $\text{ordem}(h) \geq 5$.

Por outro lado, se $g \in m_2^3$, tem-se $\text{ordem}(g) \geq 3$. Logo, a ordem de um elemento qualquer de $m_2^3 \langle x^2y, x^3+6y^5 \rangle$ é ≥ 8 .

Como $\text{ordem}(y^7) = 7 < 8$, segue que $m_2^7 \not\subset m_2^3 \langle x^2y, x^3+6y^5 \rangle$,

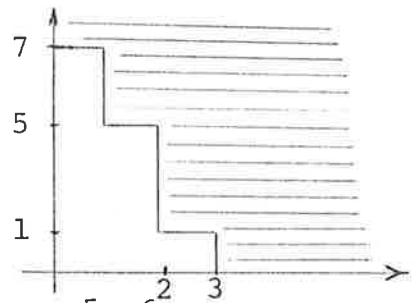
donde, $\beta(f_0) \leq 2$. Facilmente se verifica que $m_2^7 \subset m_2^2 \langle \partial f_0 \rangle$.

Então, $\alpha(f_0) = 7$, $\beta(f_0) = 2$ e $\lambda_0 = 5$. Como $B_{f_0} = \Sigma_2 \ 2 \ 2 \ 0$, segue que $i_{\lambda_0} = 0$, e portanto, que f_0 não admite uma semi-boua-decomposiçãõ.

Para $a \neq 0$, temos

$$\langle \partial f_a, f_a \rangle = \langle 3x^2y + ay^5, x^3 + 6y^5 + 5axy^4, xy^5 \rangle$$

conforme (5.4). Como $-x\partial_1 f_a + 3y\partial_2 f_a = 18y^6 + 14axy^5$, segue que a escada de $\langle \partial f_a \rangle$ é dada por:



donde se conclui que $xy^5 \notin \langle \partial f_a \rangle$. Como $xy^5, y^6 \in \langle \partial f_a, f_a \rangle$, segue que $\alpha(f_a) = 6$, $\beta(f_a) = 0$ e portanto, $\lambda_0 = 6$.

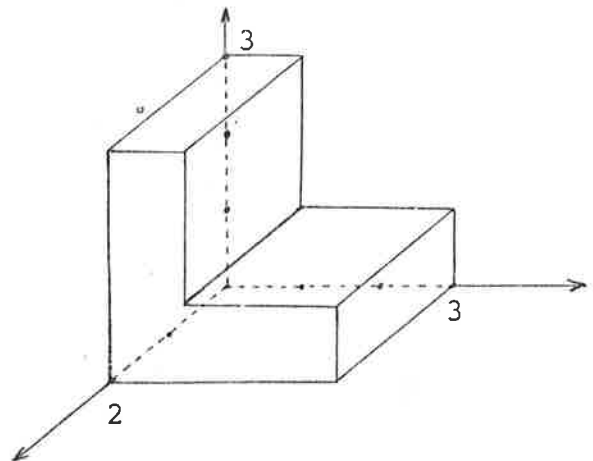
Como $B_{f_a} = \Sigma_2 \ 2 \ 2 \ 0$, segue que $i_{\lambda_0} = 0$, e então, que f_a não admite uma semi-boua-decomposiçãõ.

$$(2) \ Q_{10} : f_a = x^3 + y^4 + yz^2 + axy^3, \quad a \in \mathbb{C}.$$

Para $a = 0$, tem-se

$$\langle \partial f_0, f_0 \rangle = \langle \partial f_0 \rangle = \langle x^2, 4y^3 + z^2, yz \rangle$$

A escada de $\langle \partial f_0 \rangle$ é dada por:



Portanto, $xz^2 \notin \langle \partial f_0 \rangle$, e então, $xy^3 \notin \langle \partial f_0 \rangle$. Logo, $\alpha(f_0) \geq 5$. Facilmente se verifica que $\alpha(f_0) = 5$.

Fixemos 2, 1 e 2 como pesos para x , y e z respectivamente. Com relação a eles temos: ordem $(x^2) = 4$, ordem $(4y^3 + z^2) = 3$ e ordem $(yz) = 3$. Portanto, se $g \in \langle \partial f_0 \rangle$, tem-se ordem $(g) \geq 3$. Logo, para $h \in m_3^3 \langle \partial f_0 \rangle$, tem-se ordem $(h) \geq 6$.

Como ordem $(y^5) = 5$, segue que $m_3^5 \notin m_3^3 \langle \partial f_0 \rangle$, donde $\beta(f_0) \leq 2$. Verifica-se que $m_3^5 \in m_3^2 \langle \partial f_0 \rangle$. Então, $\alpha(f_0) = 5$, $\beta(f_0) = 2$ e $\lambda_0 = 4$. Como $B_{f_0} = \Sigma_3 \begin{smallmatrix} 3 & 3 & 0 \end{smallmatrix}$, segue que $i_{\lambda_0} = 0$, e portanto, que f_0 não admite uma semi-bom-decomposição.

Para $a \neq 0$, tem-se

$$\langle \partial f_a, f_a \rangle = \langle 3x^2 + ay^3, 4y^3 + z^2 + 3axy^2, yz, xy^3 \rangle$$

conforme (5.4). Como $y^3 \notin \langle \partial f_a, f_a \rangle$, segue que $\alpha(f_a) \geq 4$.

Verifica-se que $m_3^4 \in \langle \partial f_a, f_a \rangle$. Como $xy^3 \notin \langle \partial f_a \rangle$, tem-se $\alpha(f_a) = 4$, $\beta(f_a) = 0$ e portanto, $\lambda_0 = 4$. Desde que, $B_{f_a} = \Sigma_3 \begin{smallmatrix} 3 & 3 & 0 \end{smallmatrix}$, tem-se que $i_{\lambda_0} = 0$, e então, que f_a não admite uma semi-bom-decomposição.

Para as singularidades restantes, apenas registraremos os resultados:

$$(3) K_{12} : f_a = x^3 + y^7 + axy^5, \quad a \in \mathbb{C}.$$

Se $a = 0$, então $\alpha(f_0) = 7$, $\beta(f_0) = 1$ e $\lambda_0 = 6$. Como $B_{f_0} = \Sigma_2 \begin{smallmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{smallmatrix}$, segue que $i_{\lambda_0} \neq 0$ e $i_{\lambda_0+1} = 0$. Neste caso, f_a se decompõe completamente.

Para $a \neq 0$, tem-se $\alpha(f_a) = 7$, $\beta(f_a) = 0$ e $\lambda_0 = 7$. Como $B_{f_a} = \Sigma_2 \begin{smallmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{smallmatrix}$, segue que $i_{\lambda_0} = 0$.

$$(4) Q_{12} : f_a = x^3 + y^5 + yz^2 + axy^4, \quad a \in \mathbb{C}.$$

Para $a = 0$, tem-se $\alpha(f_0) = 6$, $\beta(f_0) = 2$ e $\lambda_0 = 4$.

Como $B_{f_0} = \Sigma_3 \ 3 \ 0$, segue que $i_{\lambda_0} = 0$.

Se $a \neq 0$, então, $\alpha(f_a) = 5$, $\beta(f_a) = 0$ e $\lambda_0 = 5$.

Sendo $B_{f_a} = \Sigma_3 \ 3 \ 0$, tem-se $i_{\lambda_0} = 0$.

$$(5) P_8 : f_a = x^3 + y^3 + z^3 + axyz, \quad a^3 + 27 \neq 0, \quad a \in \mathbb{C}.$$

Se $a = 0$, tem-se $\alpha(f_0) = 4$, $\beta(f_0) = 2$ e $\lambda_0 = 2$.

Desde que $B_{f_0} = \Sigma_3 \ 3 \ 0$, segue que $i_{\lambda_0} \neq 0$ e $i_{\lambda_0+1} = 0$. Nes

te caso temos decomposição completa.

Se $a \neq 0$ ($a^3 + 27 \neq 0$), tem-se os mesmos valores para os elementos referidos no caso $a = 0$. Neste caso, não temos de

composição completa, mas, temos boa-decomposição para f_a .

$$(6) X_9 : f_a = x^4 + y^4 + ax^2y^2; \quad a^2 \neq 4, \quad a \in \mathbb{C}.$$

Para todo $a \in \mathbb{C}$ tem-se $\alpha(f_a) = 5$, $\beta(f_a) = 2$ e por tanto, $\lambda_0 = 3$. Sendo $B_{f_a} = \Sigma_2 \ 2 \ 2 \ 0$, tem-se $i_{\lambda_0} \neq 0$ e $i_{\lambda_0+1} = 0$. No caso $a = 0$, temos decomposição completa. No caso $a \neq 0$ ($a^2 \neq 4$), temos boa-decomposição mas não decomposição completa.

$$(7) K_{13} : f_a = x^3 + xy^5 + ay^8, \quad a \in \mathbb{C}.$$

Para $a = 0$, tem-se $\alpha(f_0) = 9$, $\beta(f_0) = 1$ e $\lambda_0 = 8$.

Para $a \neq 0$, tem-se $\alpha(f_a) = 8$, $\beta(f_a) = 0$ e $\lambda_0 = 8$. Como

$B_{f_a} = \Sigma_2 \ 2 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0$ para todo $a \in \mathbb{C}$, segue que $i_{\lambda_0} = 0$ e por

tanto, que f_a não admite uma semi-bom-decomposição.

$$(8) K_{14} : f_a = x^3 + y^8 + axy^6, \quad a \in C.$$

Se $a = 0$, tem-se $\alpha(f_0) = 8$, $\beta(f_0) = 1$ e $\lambda_0 = 7$.
 Sendo $B_{f_0} = \Sigma_2 \ 2 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0$, segue que $i_{\lambda_0} \neq 0$ e $i_{\lambda_0+1} = 0$.
 No caso, temos decomposição completa.

Se $a \neq 0$, tem-se $\alpha(f_a) = 8$, $\beta(f_a) = 0$ e $\lambda_0 = 8$.
 Desde que $B_{f_a} = \Sigma_2 \ 2 \ 2 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0$, segue que $i_{\lambda_0} = 0$.

$$(9) Z_{11} : f_a = x^3y + y^5 + axy^4, \quad a \in C.$$

Se $a = 0$, tem-se $\alpha(f_0) = 6$, $\beta(f_0) = 2$ e $\lambda_0 = 4$.

Se $a \neq 0$, então, $\alpha(f_a) = 5$, $\beta(f_a) = 0$ e $\lambda_0 = 5$.

Como $B_{f_a} = \Sigma_2 \ 2 \ 2 \ 2 \ 0$, para todo $a \in C$, segue que $i_{\lambda_0} = 0$.

$$(10) Z_{12} : f_a = x^3y + xy^4 + ax^2y^3, \quad a \in C.$$

Se $a = 0$, tem-se $\alpha(f_0) = 7$, $\beta(f_0) = 2$ e $\lambda_0 = 5$.

Se $a \neq 0$, tem-se $\alpha(f_a) = 6$, $\beta(f_a) = 0$ e $\lambda_0 = 6$.

Como $B_{f_a} = \Sigma_2 \ 2 \ 2 \ 2 \ 0$, para todo $a \in C$, segue que $i_{\lambda_0} = 0$.

$$(11) W_{12} : f_a = x^4 + y^5 + ax^2y^3, \quad a \in C.$$

Para $a = 0$, tem-se $\alpha(f_0) = 6$, $\beta(f_0) = 2$ e $\lambda_0 = 4$.

Se $a \neq 0$, tem-se $\alpha(f_a) = 5$, $\beta(f_a) = 0$ e $\lambda_0 = 5$.

Para todo $a \in C$, $B_{f_a} = \Sigma_2 \ 2 \ 2 \ 2 \ 1 \ 0$. No caso $a = 0$, temos $i_{\lambda_0} \neq 0$, $i_{\lambda_0+1} = 0$ e decomposição completa. Nos demais casos temos $i_{\lambda_0} = 0$.

$$(12) W_{13} : f_a = x^4 + xy^4 + ay^6, \quad a \in C.$$

Se $a = 0$, tem-se $\alpha(f_0) = 7$, $\beta(f_0) = 2$ e $\lambda_0 = 5$.

Para $a \neq 0$, tem-se $\alpha(f_a) = 6$, $\beta(f_a) = 0$ e $\lambda_0 = 6$.

Como $B_{f_a} = \Sigma_{2 \ 2 \ 2 \ 1 \ 0}$, para todo $a \in C$, segue que

$$i_{\lambda_0} = 0.$$

$$(13) \ Q_{11} : f_a = x^3 + y^2z + xz^3 + az^5, \ a \in C.$$

Para $a = 0$, tem-se $\alpha(f_0) = 6$, $\beta(f_0) = 2$ e $\lambda_0 = 4$.

Se $a \neq 0$, tem-se $\alpha(f_a) = 5$, $\beta(f_a) = 0$ e $\lambda_0 = 5$.

Como $B_{f_a} = \Sigma_{3 \ 3 \ 0}$ para todo $a \in C$, segue que $i_{\lambda_0} = 0$.

$$(14) \ S_{11} : f_a = x^4 + y^2z + xz^2 + ax^3z, \ a \in C.$$

Se $a = 0$, tem-se $\alpha(f_0) = 5$, $\beta(f_0) = 2$ e $\lambda_0 = 3$.

Se $a \neq 0$, tem-se $\alpha(f_a) = 4$, $\beta(f_a) = 0$ e $\lambda_0 = 4$.

Como $B_{f_a} = \Sigma_{3 \ 3 \ 0}$ para todo $a \in C$, segue que

$$i_{\lambda_0} = 0.$$

$$(15) \ S_{12} : f_a = x^2y + y^2z + xz^3 + az^5, \ a \in C.$$

Se $a = 0$, tem-se $\alpha(f_0) = 6$, $\beta(f_0) = 2$ e $\lambda_0 = 4$.

Se $a \neq 0$, tem-se $\alpha(f_a) = 5$, $\beta(f_a) = 0$ e $\lambda_0 = 5$.

Como $B_{f_a} = \Sigma_{3 \ 3 \ 0}$ para todo $a \in C$, então $i_{\lambda_0} = 0$.

$$(16) \ U_{12} : f_a = x^3 + y^3 + z^4 + axyz^2$$

Se $a = 0$, tem-se $\alpha(f_0) = 5$, $\beta(f_0) = 2$ e $\lambda_0 = 3$.

Se $a \neq 0$, tem-se $\alpha(f_a) = 4$, $\beta(f_a) = 0$ e $\lambda_0 = 4$.

Como $B_{f_a} = \Sigma_{3 \ 3 \ 1 \ 0}$ para todo $a \in C$, segue que $i_{\lambda_0} \neq 0$ e $i_{\lambda_0+1} = 0$ se $a = 0$, caso em que f_a se decompõe completamente, e, $i_{\lambda_0} = 0$ se $a \neq 0$.

$$(17) J_{10} : f_a = x^3 + y^6 + ax^2y^2, \quad a \in \mathbb{C}, \quad 4a^3 + 27 \neq 0.$$

Se $a = 0$, tem-se $\alpha(f_0) = 6$, $\beta(f_0) = 1$ e $\lambda_0 = 5$.
 Como $B_{f_0} = \Sigma \begin{smallmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{smallmatrix}$, segue que $i_{\lambda_0} \neq 0$ e $i_{\lambda_0+1} = 0$,
 caso em que f_a se decompõe completamente.

Se $a \neq 0$, tem-se $\alpha(f_a) = 7$, $\beta(f_a) = 1$ e $\lambda_0 = 6$.
 Sendo $B_{f_a} = \Sigma \begin{smallmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{smallmatrix}$, segue que $i_{\lambda_0} = 0$.

5.8. OBSERVAÇÕES: (1) (5.6) e (5.7) continuam verdadeiros para o caso real, excluindo também para o caso de (5.7), as singularidades estavelmente equivalentes à singularidades homogêneas.

(2) Por ([26]), sabemos que X_9 ($a \neq 0$, $a^2 \neq 4$), não se decompõe completamente.

Uma Análise das Singularidades 2-Modais, Estavelmente Equivalentes à Singularidades em Duas Variáveis:

O resultado desta análise se resume no:

5.9. TEOREMA: Seja $f : \mathbb{C}^n, 0 \rightarrow \mathbb{C}, 0$ 2-modal, estavelmente equivalente a uma singularidade em duas variáveis.
 Então, f se decompõe completamente, se e somente se, $i_{\lambda_0} \neq 0$ e $i_{\lambda_0+1} = 0$.

Demonstração: Limitaremos apenas em registrar os elementos calculados em cada caso.

$$(1) \quad E_{18} : f_{a,b} = x^3 + y^{10} + axy^7 + bxy^8; \quad a, b \in \mathbb{C}.$$

$$\begin{aligned} a = b = 0 & : \alpha = 10, \quad \beta = 1, \quad \lambda_O = 9, \quad i_{\lambda_O} \neq 0 \text{ e } i_{\lambda_O+1} = 0 \\ a \neq 0 \text{ ou } b \neq 0 & : \alpha = 10, \quad \beta = 0, \quad \lambda_O = 10 \quad \text{e} \quad i_{\lambda_O} = 0 \end{aligned}$$

$$(2) \quad E_{19} : f_{a,b} = x^3 + xy^7 + ay^{11} + by^{12}; \quad a, b \in \mathbb{C}.$$

$$\begin{aligned} a = b = 0 & : \alpha = 13, \quad \beta = 1, \quad \lambda_O = 12 \quad \text{e} \quad i_{\lambda_O} = 0 \\ a = 0, b \neq 0 & : \alpha = 12, \quad \beta = 0, \quad \lambda_O = 12 \quad \text{e} \quad i_{\lambda_O} = 0 \\ a \neq 0 & : \alpha = 11, \quad \beta = 0, \quad \lambda_O = 11 \quad \text{e} \quad i_{\lambda_O} = 0 \end{aligned}$$

$$(3) \quad E_{20} : f_{a,b} = x^3 + y^{11} + axy^8 + bxy^9; \quad a, b \in \mathbb{C}.$$

$$\begin{aligned} a = b = 0 & : \alpha = 11, \quad \beta = 1, \quad \lambda_O = 10, \quad i_{\lambda_O} \neq 0 \quad \text{e} \quad i_{\lambda_O+1} = 0 \\ a \neq 0 \text{ ou } b \neq 0 & : \alpha = 11, \quad \beta = 0, \quad \lambda_O = 10 \quad \text{e} \quad i_{\lambda_O} = 0 \end{aligned}$$

$$(4) \quad Z_{17} : f_{a,b} = x^3y + y^8 + axy^6 + bxy^7; \quad a, b \in \mathbb{C}.$$

$$\begin{aligned} a = b = 0 & : \alpha = 9, \quad \beta = 2, \quad \lambda_O = 7 \quad \text{e} \quad i_{\lambda_O} = 0 \\ a \neq 0 \text{ ou } b \neq 0 & : \alpha = 8, \quad \beta = 0, \quad \lambda_O = 8 \quad \text{e} \quad i_{\lambda_O} = 0 \end{aligned}$$

$$(5) \quad Z_{18} : f_{a,b} = x^3y + xy^6 + ay^9 + by^{10}; \quad a, b \in \mathbb{C}.$$

$$\begin{aligned} a = b = 0 & : \alpha = 11, \quad \beta = 2, \quad \lambda_O = 9 \quad \text{e} \quad i_{\lambda_O} = 0 \\ a = 0, b \neq 0 & : \alpha = 10, \quad \beta = 0, \quad \lambda_O = 10 \quad \text{e} \quad i_{\lambda_O} = 0 \\ a \neq 0 & : \alpha = 9, \quad \beta = 0, \quad \lambda_O = 9 \quad \text{e} \quad i_{\lambda_O} = 0 \end{aligned}$$

$$(6) \quad Z_{19} : f_{a,b} = x^3 y + y^9 + axy^7 + bxy^8; \quad a, b \in \mathbb{C}.$$

$$a = b = 0 : \alpha = 10, \beta = 2, \lambda_0 = 8 \quad e \quad i_{\lambda_0} = 0$$

$$a \neq 0 \quad \text{ou}$$

$$b \neq 0 : \alpha = 9, \beta = 0, \lambda_0 = 9 \quad e \quad i_{\lambda_0} = 0$$

$$(7) \quad W_{17} : f_{a,b} = x^4 + xy^5 + ay^7 + by^8; \quad a, b \in \mathbb{C}.$$

$$a = b = 0 : \alpha = 9, \beta = 2, \lambda_0 = 7 \quad e \quad i_{\lambda_0} = 0$$

$$a = 0, b \neq 0 : \alpha = 8, \beta = 0, \lambda_0 = 8 \quad e \quad i_{\lambda_0} = 0$$

$$a \neq 0 : \alpha = 7, \beta = 0, \lambda_0 = 7 \quad e \quad i_{\lambda_0} = 0$$

$$(8) \quad W_{18} : f_{a,b} = x^4 + y^7 + ax^2 y^4 + bx^2 y^5; \quad a, b \in \mathbb{C}.$$

$$a = b = 0 : \alpha = 8, \beta = 2, \lambda_0 = 6, i_{\lambda_0} \neq 0 \quad e \quad i_{\lambda_0+1} = 0$$

$$a \neq 0 \quad \text{ou}$$

$$b \neq 0 : \alpha = 7, \beta = 0, \lambda_0 = 7 \quad e \quad i_{\lambda_0} = 0$$

$$(9) \quad K_{16} : f_{a,b} = x^3 + ax^2 y^3 + y^9 + bxy^7 \quad (4a^3 + 27 \neq 0; a, b \in \mathbb{C}).$$

$$a = b = 0 : \alpha = 9, \beta = 1, \lambda_0 = 8, i_{\lambda_0} \neq 0 \quad e \quad i_{\lambda_0+1} = 0$$

$$a = 0, b \neq 0 : \alpha = 9, \beta = 0, \lambda_0 = 9 \quad e \quad i_{\lambda_0} = 0$$

$$a \neq 0 \quad e \quad b \neq 0 : \alpha = 10, \beta = 0, \lambda_0 = 10 \quad e \quad i_{\lambda_0} = 0$$

$$a \neq 0, b = 0 : \alpha = 11, \beta = 1, \lambda_0 = 10 \quad e \quad i_{\lambda_0} = 0$$

$$(10) \quad J_{3,p} : f_{a,b} = x^3 + x^2 y^3 + ay^{9+p} + by^{10+p} \quad (p > 0,$$

$$a \neq 0; a, b \in \mathbb{C}, \mu = 16+p).$$

$$\alpha = 9+p, \quad \beta = 0, \quad \lambda_0 = 9+p \quad e \quad i_{\lambda_0} = 0$$

$$(11) \quad Z_{1,0} : f_{a,b} = x^3y + ax^2y^3 + bxy^6 + y^7 \quad (4a^3 + 27 \neq 0; a, b \in \mathbb{C}, \mu=15)$$

$$a = b = 0 : \alpha = 8, \beta = 2, \lambda_0 = 6 \quad e \quad i_{\lambda_0} = 0$$

$$a = 0, b \neq 0 : \alpha = 7, \beta = 0, \lambda_0 = 7 \quad e \quad i_{\lambda_0} = 0$$

$$a \neq 0, b = 0 : \alpha = 9, \beta = 2, \lambda_0 = 7 \quad e \quad i_{\lambda_0} = 0$$

$$a \neq 0, b \neq 0 : \alpha = 8, \beta = 0, \lambda_0 = 8 \quad e \quad i_{\lambda_0} = 0$$

$$(12) \quad Z_{1,p} : f_{a,b} = x^3y + x^2y^3 + ay^{7+p} + by^{8+p} \quad (p > 0, a \neq 0; a, b \in \mathbb{C}, \mu=15+p)$$

$$\alpha = 7+p, \quad \beta = 0, \quad \lambda_0 = 7+p \quad e \quad i_{\lambda_0} = 0$$

$$(13) \quad W_{1,0} : f_{a,b} = x^4 + ax^2y^3 + bx^2y^4 + y^6 \quad (a^2 \neq 4; a, b \in \mathbb{C}, \mu=15)$$

$$a = b = 0 : \alpha = 7, \beta = 2, \lambda_0 = 5, i_{\lambda_0} \neq 0 \quad e \quad i_{\lambda_0+1} = 0$$

$$a = 0, b \neq 0 : \alpha = 6, \beta = 0, \lambda_0 = 6 \quad e \quad i_{\lambda_0} = 0$$

$$a \neq 0, b = 0 : \alpha = 8, \beta = 2, \lambda_0 = 6 \quad e \quad i_{\lambda_0} = 0$$

$$a \neq 0, b \neq 0 : \alpha = 7, \beta = 0, \lambda_0 = 7 \quad e \quad i_{\lambda_0} = 0$$

$$(14) \quad W_{1,p} : f_{a,b} = x^4 + x^2y^3 + ay^{6+p} + by^{7+p} \quad (p > 0, a \neq 0; a, b \in \mathbb{C}, \mu=15+p)$$

$$\alpha = 6+p, \quad \beta = 0, \quad \lambda_0 = 6+p \quad e \quad i_{\lambda_0} = 0$$

$$(15) \quad W_{1,2q-1}^{\#} : f_{a,b} = (x^2 + y^3)^2 + axy^{4+q} + bxy^{5+q} \quad (q > 0,$$

$$a \neq 0; a, b \in \mathbb{C}, \mu = 15+2q)$$

$$\alpha = 6 + q, \quad \beta = 1, \quad \lambda_0 = 5 + q \quad e \quad i_{\lambda_0} = 0$$

$$(16) \quad W_{1,2q}^{\#} : f_{a,b} = (x^2 + y^3)^2 + ax^2y^{3+q} + bx^2y^{4+q} \quad (q > 0,$$

$$a \neq 0; a, b \in \mathbb{C}, \mu = 15+2q)$$

$$\alpha = 6 + q, \quad \beta = 0, \quad \lambda_0 = 6 + q \quad e \quad i_{\lambda_0} = 0$$

- 5.10. OBSERVAÇÕES: (1) As famílias acima, são dadas em ([5]).
 (2) Para as demais singularidades 2-modais, aquelas que analisamos, comprovam o mesmo resultado dado por (5.9).

*Decomposição de uma Singularidade f m -modal ($m \leq 2$),
 em Termos da Região $R(f)$*

Analisando as singularidades m -modais ($m \leq 2$) estavelmente equivalentes à singularidades em duas variáveis, em termos da região descrita por (4.1), obtivemos os seguintes resultados:

- 5.11. TEOREMA: Seja $f : C^n, 0 \rightarrow C, 0$ m -modal ($m \leq 2$), estavelmente equivalente a uma singularidade em duas variáveis.

Então, f admite uma semi-bom-decomposição, se e somente se, $A(f) + \eta(f) = \mu(f) - 1$.

- 5.12. COROLÁRIO: Nas condições acima, seja f m -modal, com $m = 0, 2$.

Então, f se decompõe completamente, se e somente se, $A(f) + \eta(f) = \mu(f) - 1$.

- 5.13. COROLÁRIO: Nas condições de (5.11), seja f 1-modal, não estavelmente equivalente a $X^4 + Y^4 \pm 6X^2Y^2$.

Então, f se decompõe completamente, se e somente, $A(f) + \eta(f) = \mu(f) - 1$.

Demonstração (do Teorema):(i) $m = 0$.

Se f for estavelmente equivalente a $g(x,y) = x^2y + y^{k-1}$ ($k \geq 4$), então temos:

$$\tilde{\alpha}(f) = (k-1, 1, 1, 1, \dots), \quad \tilde{\beta}(f) = (1, 0, \dots)$$

e portanto, $A(f) = \frac{k}{2}$, $\eta(f) = 1$. Logo, $A(f) + \eta(f) = \frac{k+2}{2}$ e $\mu(f) = k$.

Se $k = 4$, tem-se $A(f) + \eta(f) = \mu(f) - 1$. Neste caso, sabemos que f se decompõe completamente ($K = C$). Se $k \geq 5$, tem-se $A(f) + \eta(f) < \mu(f) - 1$.

Se f for estavelmente equivalente a $g(x,y) = x^3 + xy^3$, teremos $\tilde{\alpha}(f) = (5, 2, 1, \dots)$ e $\tilde{\beta} = (1, 0, \dots)$ e portanto, $A(f) = \frac{7}{2}$ e $\eta(f) = 2$. Logo, $A(f) + \eta(f) \neq \mu(f) - 1$.

Para os demais casos, o resultado segue de (4.3).

(ii) $m = 1$.

Para este caso, apresentemos a seguinte tabela:

TABELA A

Singularidade	$A(f)$	$\eta(f)$	$A(f) + \eta(f)$	$\mu(f) - 1$
$K_{12} : \begin{cases} a = 0 \\ a \neq 0 \end{cases}$	6	5	11	11
	0	4	4	11
$K_{13} : \begin{cases} a = 0 \\ a \neq 0 \end{cases}$	$13/2$	4	$21/2$	12
	0	4	4	12

$K_{14} :$	$a = 0$	7	6	13	13
	$a \neq 0$	0	5	5	13
$Z_{11} :$	$a = 0$	9	2	11	10
	$a \neq 0$	0	2	2	10
$Z_{12} :$	$a = 0$	8	2	10	11
	$a \neq 0$	0	2	2	11
$Z_{13} :$	$a = 0$	11	2	13	12
	$a \neq 0$	0	2	2	12
$W_{12} :$	$a = 0$	8	3	11	11
	$a \neq 0$	0	3	3	11
$W_{13} :$	$a = 0$	10	3	13	12
	$a \neq 0$	0	3	3	12
$J_{10} :$	$a = 0$	5	4	9	9
	$a \neq 0$	5	3	8	9
$X_9 :$	$a = 0$	6	2	8	8
	$a = \pm 6$	6	2	8	8
	$a \neq \pm 6; 0$	7	2	9	8

(iii) $m = 2$.

Também neste caso, apresentemos a tabela:

TABELA B

Singularidade	$A(f)$	$\eta(f)$	$A(f) + \eta(f)$	$\mu(f)-1$
$E_{18} : \begin{cases} a=b=0 \\ a=0, b \neq 0 \\ a \neq 0 \end{cases}$	9 0 0	8 7 6	17 7 6	17 17 17
$E_{19} : \begin{cases} a=b=0 \\ a=0, b \neq 0 \\ a \neq 0 \end{cases}$	19/2 0 0	6 6 6	31/2 6 6	18 18 18
$E_{20} : \begin{cases} a=b=0 \\ a=0, b \neq 0 \\ a \neq 0 \end{cases}$	10 0 0	9 8 7	19 8 7	19 19 19
$W_{17} : \begin{cases} a=b=0 \\ a=0, b \neq 0 \\ a \neq 0 \end{cases}$	13 0 0	4 4 4	17 4 4	16 16 16
$W_{18} : \begin{cases} a=b=0 \\ a=0, b \neq 0 \\ a \neq 0 \end{cases}$	12 0 0	5 5 4	17 5 4	17 17 17
$Z_{17} : \begin{cases} a=b=0 \\ a=0, b \neq 0 \\ a \neq 0 \end{cases}$	15 0 0	2 2 2	17 2 2	16 16 16
$Z_{18} : \begin{cases} a=b=0 \\ a=0, b \neq 0 \\ a \neq 0 \end{cases}$	12 8 15/2	2 2 2	14 10 19/2	17 17 17

$z_{19} :$	$\begin{cases} a=b=0 \\ a=0, b \neq 0 \\ a \neq 0 \end{cases}$	$\begin{matrix} 17 \\ 0 \\ 8 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 19 \\ 2 \\ 10 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 18 \\ 18 \\ 18 \end{matrix}$
$K_{16} :$	$\begin{cases} a=b=0 \\ a=0, b \neq 0 \\ a \neq 0, b=0 \\ a \neq 0, b \neq 0 \end{cases}$	$\begin{matrix} 8 \\ 0 \\ 8 \\ 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 7 \\ 6 \\ 5 \\ 5 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 15 \\ 6 \\ 13 \\ 5 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 15 \\ 15 \\ 15 \\ 15 \end{matrix}$
$J_{3,p} :$		0	5	5	$15+p$
$z_{1,0} :$	$\begin{cases} a=b=0 \\ a=0, b \neq 0 \\ a \neq 0, b=0 \\ a \neq 0, b \neq 0 \end{cases}$	$\begin{matrix} 13 \\ 0 \\ 10 \\ 13/2 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 5 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 18 \\ 2 \\ 12 \\ 17/2 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 14 \\ 14 \\ 14 \\ 14 \end{matrix}$
$z_{1,p} :$		0	2	2	$14+p$
$w_{1,0} :$	$\begin{cases} a=b=0 \\ a, b \neq 0, a^2 \neq 30 \\ a^2=30, b \neq 0 \\ a \neq 0, a^2 \neq 30, b=0 \\ a^2=30, b=0 \\ a=0, b \neq 0 \end{cases}$	$\begin{matrix} 10 \\ 0 \\ 6 \\ 12 \\ 10 \\ 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 4 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \\ 4 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 14 \\ 3 \\ 9 \\ 15 \\ 13 \\ 4 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 14 \\ 14 \\ 14 \\ 14 \\ 14 \\ 14 \end{matrix}$
$w_{1,p} :$		0	3	3	$14+p$
$w_{1,2q-1}^{\#} :$		$5+\frac{q}{2}$	3	$8+\frac{q}{2}$	$13+2q$
$w_{1,2q}^{\#} :$		0	3	3	$14+2q$

Uplas de Invariantes para Singularidades m-Modais
($m \leq 2$), em Duas Variáveis

Aproveitando os cálculos feitos, vamos dar *uplas* de *invariantes diferenciáveis* que caracterizam os tipos $M_j^!$ s, para singularidades m-modais ($m \leq 2$), estavelmente equivalentes à singularidades em duas variáveis.

(i) $m = 0$

Singularidade	$u(f) = (\mu(f), \lambda_0(f))$
$A_k ; k \geq 1$	(k, k)
$D_k ; k \geq 4$	$(k, k-2)$
E_6	$(6, 3)$
E_7	$(7, 4)$
E_8	$(8, 4)$

(ii) $m = 1$

Singularidade	$u(f) = (\mu(f), \alpha(f), \eta(f))$
X_9	$(9, 5, 2)$
J_{10}	$(10, 6, 4)$ ou $(10, 7, 3)$
Z_{11}	$(11, 6, 2)$ ou $(11, 5, 2)$
K_{12}	$(12, 7, 5)$ ou $(12, 7, 4)$
Z_{12}	$(12, 7, 2)$ ou $(12, 6, 2)$
W_{12}	$(12, 6, 3)$ ou $(12, 5, 3)$
K_{13}	$(13, 9, 4)$ ou $(13, 8, 4)$
Z_{13}	$(13, 7, 2)$ ou $(13, 6, 2)$
W_{13}	$(13, 7, 3)$ ou $(13, 6, 3)$
K_{14}	$(14, 8, 6)$ ou $(14, 8, 5)$

(iii) $m = 2$

Singularidade	$u(f) = (\mu(f), \alpha(f), \alpha(\delta^2 \langle f \rangle), \beta(f), \eta(f))$
E_{18}	$(18, 10, 8, 1, 8), (18, 10, 6, 0, 6)$ ou $(18, 10, 7, 0, 7)$
Z_{18}	$(18, 11, 6, 2, 2), (18, 9, 6, 0, 2)$ ou $(18, 10, 6, 0, 2)$
W_{18}	$(18, 8, 6, 2, 5), (18, 7, 5, 0, 4)$ ou $(18, 7, 5, 0, 5)$
E_{20}	$(20, 11, 9, 1, 9), (20, 11, 7, 0, 7)$ ou $(20, 11, 8, 0, 8)$
E_{19}	$(19, 13, 6, 1, 6), (19, 11, 6, 0, 6)$ ou $(19, 12, 6, 0, 6)$
W_{17}	$(17, 9, 4, 2, 4), (17, 7, 4, 0, 4)$ ou $(17, 8, 4, 0, 4)$
Z_{17}	$(17, 9, 6, 2, 2)$ ou $(17, 8, 6, 0, 2)$
Z_{19}	$(19, 10, 7, 2, 2)$ ou $(19, 9, 7, 0, 2)$
$J_{3,p} \ (p > 0)$	$(16+p, p+9, 5, 0, 5)$
$Z_{1,p} \ (p > 0)$	$(15+p, 7+p, 5, 0, 2)$
$W_{1,p} \ (p > 0)$	$(15+p, 6+p, 4, 0, 3)$
$W_{1,2q-1}^{\#} \ (q > 0)$	$(14+2q, 6+q, 4, 1, 3)$
$W_{1,2q}^{\#} \ (q > 0)$	$(15+2q, 6+q, 4, 0, 3)$
K_{16}	$(16, 9, 7, 1, 7), (16, 9, 6, 0, 6), (16, 11, 5, 1, 5)$ ou $(16, 10, 5, 0, 5)$
$W_{1,0}$	$(15, 7, 5, 2, 4), (15, 7, 4, 0, 3), (15, 8, 4, 2, 3), (15, 6, 4, 0, 4)$ ou $(15, 8, 5, 2, 3)$
$Z_{1,0}$	$(15, 8, 5, 2, 2), (15, 7, 5, 0, 2), (15, 9, 5, 2, 2), (15, 8, 5, 0, 2)$ ou $(15, 7, 5, 0, 3)$

5.14. OBSERVAÇÕES: (1) Como podemos constatar através da singularidade X_9 , o estudo da decomposição completa de um germe estavelmente equivalente a um germe em duas variáveis, *parece* ser mais eficiente usando a identidade

algébrica $A(f) + \eta(f) = \mu(f) - 1$, ao invés do invariante λ_0 .

(2) Resultados análogos ao (5.11), também temos obtido para singularidades com modalidade interna 3, classificadas recentemente por ([24]). Lembremos que as com modalidade interna ≤ 2 , estão contidas nas com modalidade ≤ 2 .

(3) Como podemos constatar pelas uplas de invariantes dadas para $m = 1, 2$, $\alpha(f)$, $\beta(f)$ e $\eta(f)$, não são *invariantes topológicos* (conforme Lê Dũng Tráng, Ramanujam e Teissier).

CAPÍTULO IV

SÍMBOLO DE BOARDMAN E (r,k) -DETERMINAÇÃO

Neste capítulo, mostraremos para uma classe bastante ampla de germes, que o comprimento do símbolo de Boardman, está mais relacionado com a (r,k) -determinação do que com a determinação usual, isto é, $(0,k)$ -determinação.

Para justificar certos conceitos que introduziremos, consideremos o seguinte exemplo:

1.1. EXEMPLO:

Seja $f : K^2, 0 \rightarrow K, 0$ definido por $f(x,y) = x^8 + y^9 + x^3 y^4$.

Mostremos que $m_2^4 \langle f \rangle \subset m_2^5 \langle \partial_1 f, \partial_2 f, f \rangle$, onde

$$\partial_1 f = 8x^7 + 3x^2 y^4 \quad \text{e} \quad \partial_2 f = 9y^8 + 4x^3 y^3$$

Como:

$$x^4 f = x^{12} + x^4 y^9 + x^7 y^4 = \frac{1}{8} x^5 \partial_1 f + \frac{5}{32} x^4 y \partial_2 f - \frac{13}{32} x y^5 (x^3 y^4);$$

$$x^3 y f = x^{11} y + x^3 y^{10} + x^6 y^5 = \frac{1}{8} x^4 y \partial_1 f +$$

$$+ \frac{5}{32} x^3 y^2 \partial_2 f - \frac{13}{32} y^6 (x^3 y^4);$$

$$x^2 y^2 f = x^{10} y^2 + x^2 y^{11} + x^5 y^6 = \left(\frac{1}{8} x^3 y^2 - \frac{13}{96} y^7 \right) \partial_1 f +$$

$$+ \frac{5}{32} x^2 y^3 \partial_2 f + \frac{13}{12} x^4 y^3 (x^3 y^4);$$

$$x y^3 f = x^9 y^3 + x y^{12} + x^4 y^7 = \frac{5}{27} x^2 y^3 \partial_1 f + \left(\frac{1}{9} x y^4 - \frac{13}{108} x^6 \right) \partial_2 f +$$

$$+ \frac{117}{108} x^3 y^4 (x^3 y^4), \quad \text{e}$$

$$y^4 f = x^8 y^4 + y^{13} + x^3 y^8 = \frac{5}{27} x y^4 \partial_1 f + \frac{1}{9} y^5 \partial_2 f - \frac{13}{27} x^5 (x^3 y^4),$$

e lembrando que $\langle \partial_1 f, \partial_2 f, f \rangle = \langle \partial_1 f, \partial_2 f, x^3 y^4 \rangle$, segue que,
 $m_2^4 \langle f \rangle \subset m_2^5 \langle \partial_1 f, \partial_2 f, f \rangle$.

Por outro lado, $m_2^3 \langle f \rangle \not\subset m_2^4 \langle \partial_1 f, \partial_2 f, f \rangle$.

De fato: mostrar que $m_2^3 \langle f \rangle \not\subset m_2^4 \langle \partial_1 f, \partial_2 f, f \rangle$ é equivalente mostrar que $m_2^3 \langle f \rangle \not\subset m_2^4 \langle \partial_1 f, \partial_2 f \rangle$.

$$\text{Temos que } xy^2 f = x^9 y^2 + xy^{11} + x^4 y^6.$$

Como $\pi_{12} (m_2^4 \langle \partial_1 f, \partial_2 f \rangle)$ é o K-espaço vetorial dado por:

$$\begin{aligned} & \langle x^{12}, x^{11} y, x^{10} y^2, x^9 y^3, x^8 y^4, x^7 y^5, x^6 y^6, x^5 y^7, x^4 y^8, x^3 y^9, \\ & x^2 y^{10}, x^{11}, x^{10} y, x^8 y^3, x^7 y^4, x^6 y^5, x^5 y^6, x^4 y^7, x^3 y^8, x^2 y^9, \\ & x^7 y^3, x^6 y^4, x^5 y^5, x^3 y^7, x^2 y^8, 8x^9 y^2 + 3x^4 y^6, 9xy^{11} + 4x^4 y^6 \rangle_{\mathbb{R}} \end{aligned}$$

$$\text{e, } \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 8 & 0 & 3 \\ 0 & 9 & 4 \end{bmatrix} \neq 0, \text{ segue que } xy^2 f \notin m_2^4 \langle \partial_1 f, \partial_2 f \rangle.$$

$$\text{Seja } \partial_{i_1 \dots i_k} f = \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}, \quad 1 \leq i_1, \dots, i_k \leq 2,$$

onde $x_{i_1} = x$ e $x_{i_2} = y$.

Consideramos os seguintes ideais:

$$I = \langle f \rangle$$

$$\delta I = I_1 = \langle \partial_1 f, \partial_2 f, x^3 y^4 \rangle = \langle \partial_1 f, \partial_2 f, f \rangle$$

$$\begin{aligned}\delta^2 I = I_2 &= \langle \partial_{11} f, \partial_{12} f, \partial_{22} f, x^2 y^4, x^3 y^3 \rangle = \\ &= \langle 28x^6 + 3xy^4, 6y^7 + x^3 y^2, x^2 y^3 \rangle\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\delta^3 I = I_3 &= \langle \partial_{111} f, \partial_{112} f, \partial_{122} f, \partial_{222} f, xy^4, x^2 y^3, x^3 y^2 \rangle = \\ &= \langle 56x^5 + y^4, 2ly^6 + x^3 y, xy^3, x^2 y^2 \rangle\end{aligned}$$

$$\delta^4 I = I_4 = m_2^3, \quad I_5 = m_2^2 \quad \text{e} \quad I_6 = m_2$$

Logo, temos que $I_i \subset m_2 I_{i+1}$, ($i = 1, 2, \dots, 5$) e, $m_2^4 I \subset m_2^5 I_1$.

Seja $I \subset m_n \subset C_O(K^n)$ um ideal, $\theta_1, \dots, \theta_n$ números racionais positivos e $x_1, \dots, x_n$ um sistema de coordenadas nas vizinhanças de $0 \in K^n$. Seja $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n)$.

1.2. DEFINIÇÃO: I é dito um ideal do tipo *quase-homogêneo com relação a θ* , se existir um K -isomorfismo de álgebras $\psi : C_O(K^n) \rightarrow C_O(K^n)$, tal que:

- (i) $\psi(I) = \langle g_1, \dots, g_\ell \rangle$, e,
- (ii) $g_1, \dots, g_\ell$ são quase-homogêneos com relação a θ .

NOTAÇÃO: I é do tipo T.I.Q.H.- θ .

1.3. DEFINIÇÃO: I é dito um ideal do tipo D_p , onde $p \in \mathbb{Z}$, $p > 0$, se, sendo posto $\delta^k I = r$ ($k \geq 0$), existir um K -isomorfismo de álgebras $\psi_k : C_O(K^n) \rightarrow C_O(K^n)$, tal que,

$$\begin{aligned} \psi_k^{\delta^k I} &= \langle x_1, \dots, x_r, h_{r+1}(x_{r+1}, \dots, x_n), \dots, \\ &h_t(x_{r+1}, \dots, x_n) \rangle \quad \text{e} \quad m_n^p \langle h_{r+1}, \dots, h_t \rangle \subset \\ &\subset m_n^{p+1} \langle \partial h_{r+1}, \dots, \partial h_t \rangle. \end{aligned}$$

NOTAÇÕES: I é do tipo $T.D_p$ ou, I satisfaz a condição D_p .

1.4. DEFINIÇÃO: Seja $f \in m_n^2 \subset C_O(K^n)$.

Se $I = \langle f \rangle$ for um ideal do tipo $T.I.Q.H.-\theta$ ou $T.D_p$, então diremos que f é do tipo $T.I.Q.H.-\theta$ ou $T.D_p$, respectivamente.

1.5. LEMA: Seja $f \in m_n^2 \subset C_O(K^n)$.

Então, $B(\langle \partial f \rangle) = B(\langle \partial f, f \rangle)$.

Demonstração: Como $f \in m_n^2$, segue que $\text{posto } \langle \partial f \rangle = \text{posto } \langle \partial f, f \rangle$.

Suponhamos que $\text{posto } \delta^{k_0} \langle \partial f \rangle = \text{posto } \delta^{k_0} \langle \partial f, f \rangle = 0$, $k_0 = 0, 1, \dots, k_0$. Logo, $\delta^{k_0+1} \langle \partial f \rangle = \left\langle \frac{\partial^s f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_s}} \right\rangle$ e $\delta^{k_0+1} \langle \partial f, f \rangle = \left\langle f, \frac{\partial^s f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_s}} \right\rangle$, onde $s = 1, \dots, k_0+2$; $1 \leq i_1, \dots, i_s \leq n$ e $x_1, \dots, x_n$ é um sistema de coordenadas nas vizinhanças de $0 \in K^n$.

Segue então que $\text{posto } \delta^{k_0+1} \langle \partial f \rangle = \text{posto } \delta^{k_0+1} \langle \partial f, f \rangle$.

Suponhamos que $\text{posto } \delta^{k_0+1} \langle \partial f \rangle = r$.

Logo, $\delta^{k_0+2} \langle \partial f \rangle = \delta^{k_0+1} \langle \partial f \rangle + I_1$ e $\delta^{k_0+2} \langle \partial f, f \rangle = \delta^{k_0+1} \langle \partial f, f \rangle + I_2$, onde I_1 e I_2 são gerados pelos menores $(r+1) \times (r+1)$ das matrizes M_1 e M_2 respectivamente, onde:

$$M_1 = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2}} \right) \\ \left(\frac{\partial^3 f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \partial x_{i_3}} \right) \\ \vdots \\ \left(\frac{\partial^{k_0+3} f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_{k_0+3}}} \right) \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad M_2 = \begin{bmatrix} M_1 \\ \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) \end{bmatrix}$$

Como $\frac{\partial f}{\partial x_i} \in \delta^{k_0+2} \langle \partial f \rangle$, ($i = 1, \dots, n$), segue que posto $\delta^{k_0+2} \langle \partial f \rangle = \text{posto } \delta^{k_0+2} \langle \partial f, f \rangle$.

Seguindo com o mesmo raciocínio, teremos provado que $B(\langle \partial f \rangle) = B(\langle \partial f, f \rangle)$.

1.6. TEOREMA: Seja $f \in m_n^2 \subset C_0(K^n)$, do tipo T.I.Q.H.- θ .

Se $m_n^\alpha \subset m_n^\beta \langle \partial f \rangle$, então B_f é da forma $\sum_{i_1} \dots \dots i_{\alpha-\beta} 0$.

Demonstração: Suponhamos que $f \in m_n^c - m_n^{c+1}$, com $c \geq 2$.

Sendo f to tipo T.I.Q.H.- θ , segue que existe um ideal $\langle g_1, \dots, g_k \rangle$ de $C_0(K^n)$, equivalente ao ideal $\langle \partial f \rangle$, onde g_i é quase-homogêneo do tipo $(d_i; \theta)$, $i = 1, \dots, k$. Por tanto, como $m_n^\alpha \subset m_n^\beta \langle \partial f \rangle$, segue que $m_n^\alpha \subset m_n^\beta \langle g_1, \dots, g_k \rangle$.

Logo, considerando $x_1^{\ell_1} \dots x_n^{\ell_n}$ com $0 \leq \ell_1, \dots, \ell_n$ e $\ell_1 + \dots + \ell_n = \alpha$, segue que existem $h_1, \dots, h_k \in m_n^\beta$, tais que, $x_1^{\ell_1} \dots x_n^{\ell_n} = \sum_{i=1}^k h_i g_i$. Derivando em relação a x_j , teremos:

$$\begin{aligned} & \ell_j x_1^{\ell_1} \dots x_{j-1}^{\ell_{j-1}} x_j^{\ell_j-1} x_{j+1}^{\ell_{j+1}} \dots x_n^{\ell_n} = \\ & = \sum_{i=1}^k h_i \partial_j g_i + \sum_{i=1}^k \partial_j h_i g_i \end{aligned}$$

supondo $\ell_j \geq 1$.

Como cada g_i é quase-homogêneo do tipo $(d; \theta)$, onde $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n)$, segue que $g_i = \sum_{s=1}^n \theta_s x_s \partial_s g_i$ ($i = 1, \dots, k$).

$$\begin{aligned} \text{Portanto, } & \ell_j x_1^{\ell_1} \dots x_j^{\ell_j-1} \dots x_n^{\ell_n} = \sum_{i=1}^k h_i \partial_j g_i + \\ & + \sum_{s=1}^n \left[\sum_{i=1}^k (\theta_s x_s \partial_j h_i \partial_s g_i) \right]. \end{aligned}$$

Como $h_1, \dots, h_k \in m_n^\beta$, segue que $x_s \partial_j h_i \in m_n^\beta$, e então, tem-se $m_n^{\alpha-1} \subset m_n^{\beta} \langle \partial_j g_i \rangle$, $1 \leq j \leq n$, $1 \leq i \leq k$. Disto segue que $m_n^{\alpha-1} \subset m_n^{\beta} \langle g_i, \partial_j g_i \rangle$ ($1 \leq j \leq n$; $1 \leq i \leq k$).

Suponhamos $c \geq 3$.

Então posto $\langle \partial f \rangle = 0$, posto $\langle g_1, \dots, g_k \rangle = 0$ e $m_n^{\alpha-1} \subset m_n^{\beta} \delta \langle g_1, \dots, g_k \rangle$. Desde que $f \in m_n^c - m_n^{c+1}$, seguindo com raciocínio análogo, teremos $m_n^{\alpha-c+2} \subset m_n^{\beta} \delta^{c-2} \langle g_1, \dots, g_k \rangle$, pelo fato de podermos em cada estágio, trabalhar com geradores quase-homogêneos com relação a θ . Temos ainda que posto $\delta^{c-3} \langle g_1, \dots, g_k \rangle = 0$ e posto $\delta^{c-2} \langle g_1, \dots, g_k \rangle = r \geq 1$.

(i) Se $r = n$, então tem-se $m_n^{\alpha-c+2} \subset m_n^{\beta+1}$, o que acarreta que $\alpha-c+2 \geq \beta+1$, e portanto, $\alpha-\beta \geq c-1$. Logo, $B(\langle g_1, \dots, g_k \rangle) = \underbrace{\Sigma_n \dots n}_{c-2} 0$.

Pelo fato de ser $\langle g_1, \dots, g_k \rangle$ equivalente a $\langle \partial f \rangle$,

e por (1.5), segue que $B_f = \underbrace{\varepsilon_n \dots \varepsilon_n}_c 0$, com $\alpha - \beta \geq c - 1$.

(ii) Suponhamos $1 \leq r < n$.

Consideremos $\delta^{c-2} \langle g_1, \dots, g_k \rangle = \langle L_1 + \Delta_1, \dots, L_q + \Delta_q \rangle$, onde $\Delta_1, \dots, \Delta_q \in m_n^2$ e cada L_i é uma K-forma linear nas variáveis $x_1, \dots, x_n$ (obviamente existem exatamente r linearmente independentes sobre K). Como combinações lineares sobre K , de germes quase-homogêneos com relação a θ , são germes quase-homogêneos com relação a θ , então podemos supor que:

$$\delta^{c-2} \langle g_1, \dots, g_k \rangle = \langle L_1 + \Delta_1, \dots, L_r + \Delta_r, p_1, \dots, p_t \rangle,$$

onde $L_1, \dots, L_r$ são K-formas lineares K-linearmente independentes e $\Delta_1, \dots, \Delta_r, p_1, \dots, p_t \in m_n^2$, com $L_1 + \Delta_1, \dots, L_r + \Delta_r, p_1, \dots, p_t$ quase-homogêneos com relação a θ .

Seja ω_i o grau de quase-homogeneidade de $L_i + \Delta_i$ ($i = 1, \dots, r$) com relação a θ . Podemos supor que $\omega_1 \leq \omega_2 \leq \dots \leq \omega_r$.

Suponhamos que $\frac{\partial L_1}{\partial x_{j_1}} \neq 0$.

Se $\omega_1 = \omega_2 = \dots = \omega_s < \omega_{s+1}$, então podemos escolher s variáveis $x_{j_1}, \dots, x_{j_s}$, tal que:

$$\det \frac{\partial (L_1, \dots, L_s)}{\partial (x_{j_1}, \dots, x_{j_s})} \neq 0$$

Como $\omega_s < \omega_{s+1}$ e $L_{s+1} + \Delta_{r+1}$ é quase-homogêneo com relação a θ , então L_{s+1} independe de $x_{j_1}, \dots, x_{j_s}$.

Tomemos $x_{j_{s+1}}$ tal que $\frac{\partial L_{s+1}}{\partial x_{j_{s+1}}} \neq 0$. Logo,

$$\det \frac{\partial (L_1, \dots, L_{s+1})}{\partial (x_{j_1}, \dots, x_{j_{s+1}})} \neq 0$$

Prosseguindo com o mesmo raciocínio, podemos supor a menos de combinações lineares sobre K , que:

$$\begin{cases} L_1 + \Delta_1 = x_{j_1} + L'_1 + \Delta'_1 \\ \dots\dots\dots \\ L_r + \Delta_r = x_{j_r} + L'_r + \Delta'_r \end{cases}$$

onde $L'_q + \Delta'_q$ não depende de $x_1, \dots, x_{j_q}$, L'_q K-forma linear e $\Delta'_q \in m_n^2$ ($q = 1, \dots, r$), devido à quase-homogeneidade.

Considerando agora o germe de difeomorfismo definido por:

$$\psi : \begin{cases} x_{j_s} = x_{j_s} + L'_s + \Delta'_s, & s = 1, \dots, r \\ x_b = x_b, & b \neq j_1, \dots, j_r \end{cases}$$

tem-se que ψ é quase-homogêneo com relação a θ . Tomando uma permutação $\sigma \in S_n$, com $\sigma(j_s) = s$, $s = 1, \dots, r$, e definindo $\sigma^*\psi$ por $\sigma^*\psi(x_1, \dots, x_n) = \psi(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)})$, tem-se que $\sigma^*\psi$ é um germe de difeomorfismo quase-homogêneo com

relação a $\sigma^*\theta = (\theta_{\sigma(1)}, \dots, \theta_{\sigma(n)})$ e, $\delta^{c-2}\langle g_1, \dots, g_k \rangle$ é equivalente a $\langle x_1, \dots, x_r, h_1, \dots, h_m \rangle$ com $h_j = h_j(x_{r+1}, \dots, x_n) \in m_n^2$ quase-homogêneo com relação a $\sigma^*\theta$ ($j = 1, \dots, m$).

Portanto, $m_n^{\alpha-c+2} \subset m_n^{\beta}\langle x_1, \dots, x_r, h_1, \dots, h_m \rangle$, com $h_j = h_j(x_{r+1}, \dots, x_n) \in m_n^2$, $j = 1, \dots, m$.

Nestas condições temos:

$$m_n^{\alpha-c+2} \subset m_n^{\beta}\langle x_1, \dots, x_r \rangle + m_n^{\beta}\langle h_1, \dots, h_m \rangle;$$

$$m_{n-r}^{\alpha-c+2} \approx \frac{m_n^{\alpha-c+2} + m_n^{\beta}\langle x_1, \dots, x_r \rangle}{m_n^{\beta}\langle x_1, \dots, x_r \rangle} \quad (\text{pois, } \alpha-c+2 \geq \beta+2);$$

$$\frac{m_n^{\alpha-c+2} + m_n^{\beta}\langle x_1, \dots, x_r \rangle}{m_n^{\beta}\langle x_1, \dots, x_r \rangle} \subset$$

$$\subset \frac{m_n^{\beta}\langle x_1, \dots, x_r \rangle + m_n^{\beta}\langle h_1, \dots, h_m \rangle}{m_n^{\beta}\langle x_1, \dots, x_r \rangle}, \quad \text{e,}$$

$$\frac{m_n^{\beta}\langle x_1, \dots, x_r \rangle + m_n^{\beta}\langle h_1, \dots, h_m \rangle}{m_n^{\beta}\langle x_1, \dots, x_r \rangle} \approx$$

$$\approx m_{n-r}^{\beta}\langle h_1, \dots, h_m \rangle \quad (\text{pois, } h_j = h_j(x_{r+1}, \dots, x_n) \in m_n^2, \\ j = 1, \dots, m),$$

onde " $\approx$ " denota o K-isomorfismo natural e,

$$m_{n-r} = \langle x_{r+1}, \dots, x_n \rangle C_O(K^{n-r})$$

Logo, $m_{n-r}^{\alpha-c+2} \subset m_{n-r}^{\beta}\langle h_1, \dots, h_m \rangle$. Sendo $h_1, \dots, h_m$

quase-homogêneo, segue que,

$$m_{n-r}^{\alpha-c+1} \subset m_{n-r}^{\beta} \langle \partial_j h_i \rangle$$

($j = r+1, \dots, n$; $i = 1, \dots, m$) e portanto, que $m_n^{\alpha-c+1} \subset m_n^{\beta} \langle x_1, \dots, x_r, \partial_j h_i \rangle \subset m_n^{\beta} \langle x_1, \dots, x_r, h_i, \partial_j h_i \rangle$, ($j=r+1, \dots, n$; $i = 1, \dots, m$), uma vez que $\alpha-c+1 \geq \beta+1$, pois $1 \leq r < n$.

Como $h_1, \dots, h_m \in m_n^2$ são germes em $x_{r+1}, \dots, x_n$, segue que $\langle x_1, \dots, x_r, h_i, \partial_j h_i \rangle = \delta \langle x_1, \dots, x_r, h_i \rangle$, ($j = r+1, \dots, n$; $i = 1, \dots, m$).

Pelo fato de ser $\delta^{c-2} \langle g_1, \dots, g_k \rangle$ equivalente a $\langle x_1, \dots, x_r, h_1, \dots, h_m \rangle$, segue que $m_n^{\alpha-c+1} \subset m_n^{\beta} \delta^{c-1} \langle g_1, \dots, g_k \rangle$.

Sendo $h_i, \partial_j h_i$ quase-homogêneos com relação a $\sigma^* \theta$, então podemos repetir o raciocínio usado quando da construção do germe de difeomorfismo ψ .

Então, supondo $\delta^{d-1} \langle g_1, \dots, g_k \rangle \neq m_n$ e $\delta^d \langle g_1, \dots, g_m \rangle = m_n$, teremos

$$m_n^{\alpha-d} \subset m_n^{\beta} \delta^d \langle g_1, \dots, g_k \rangle = m_n^{\beta+1}$$

Logo, $\alpha-d \geq \beta+1$, e então, $\alpha-\beta \geq d+1$.

Por $\delta^d \langle g_1, \dots, g_k \rangle = m_n$, tem-se que $B(\langle g_1, \dots, g_k \rangle)$ é da forma $\sum t_1 t_2 \dots t_d 0$. Pela equivalência de ideais entre $\langle \partial f \rangle$ e $\langle g_1, \dots, g_k \rangle$, e por (1.5), segue que B_f é da forma $\sum i_1 \dots i_{d+1} 0$, com $\alpha-\beta \geq d+1$.

Portanto, B_f é da forma $\sum i_1 \dots i_{\alpha-\beta} 0$.

1.7. EXEMPLO: Seja $f : K^2, 0 \rightarrow K, 0$ definido por $f(x, y) = x^5 + y^6$.
Então, $m_2^8 \subset m_2^3 \langle x^4, y^5 \rangle$ e $B_f = \Sigma_2 \ 2 \ 2 \ 2 \ 2 \ 1 \ 0$,
com $i_5 \neq 0$ e $i_6 = 0$.

1.8. OBSERVAÇÕES: (1) Todo ideal $I \subset m_n \subset C_O(K^n)$, do tipo T.I.Q.H.- θ , é do tipo T.D.₁. A recíproca é falsa, como mostra o exemplo (1.1), considerando $I = \langle f \rangle$.

(2) Conforme constatamos, todas as singularidades m-modais ($m \leq 2$), satisfazem a condição D_p , para algum $p \in \mathbb{Z}$, $p > 0$.

(3) Temos também (conforme [4]), que todo $f \in m_n \subset C_O(K^n)$, com $\mu \leq 13$, é do tipo T.D._p, para algum $p \in \mathbb{Z}$, $p > 0$.

Como consequência da técnica de demonstração de (1.6), temos um resultado mais geral, dado pela:

1.9. PROPOSIÇÃO: Seja $f \in m_n^2 \subset C_O(K^n)$, do tipo T.D._p.
Se $m_n^\alpha \subset m_n^\beta \langle \partial f \rangle$, então B_f é da forma
 $\Sigma i_1 \dots i_{\alpha-\beta} \ 0$.

Demonstração: De $m_n^\alpha \subset m_n^\beta \langle \partial f \rangle$, segue que,

$m_n^{\alpha+p+1} \subset m_n^{\beta+p+1} \langle \partial f \rangle$. Suponhamos que posto $\langle \partial f \rangle =$
 $=$ posto $\delta \langle \partial f \rangle = \dots =$ posto $\delta^k \langle \partial f \rangle = 0$ e posto $\delta^{k+1} \langle \partial f \rangle = r \geq 1$.

Seja $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n) \in \mathbb{N} \times \dots \times \mathbb{N}$, com $\gamma_1 + \dots +$
 $+ \dots + \gamma_n = \alpha + p + 1$.

Denotemos $x_1^{\gamma_1} \dots x_n^{\gamma_n}$ por x^γ . Então, temos que $x^\gamma = \sum_{i=1}^n h_i \partial_i f$, com $h_1, \dots, h_n \in m_n^{\beta+p+1}$. Supondo $\gamma_j \geq 1$, tem-se $\frac{\partial}{\partial x_j} x^\gamma = \sum_{i=1}^n \partial_j h_i \partial_i f + \sum_{i=1}^n h_i \partial_{ij}^2 f$. Como $\partial_j h_i \in m_n^{\beta+p}$ e f é do tipo $T.D_p$, segue $\frac{\partial}{\partial x_j} x^\gamma \in m_n^{\beta+p+1} \langle \partial_{it}^2 f \rangle$ com $i, t=1, \dots, n$. Portanto, $m_n^{\alpha+p} \subset m_n^{\beta+p+1} \delta \langle \partial f \rangle$.

De modo análogo, teremos $m_n^{\alpha+p-k} \subset m_n^{\beta+p+1} \delta^{k+1} \langle \partial f \rangle$.

- (i) Se $r = n$, então, $\alpha+p-k \geq \beta+p+2$, o que equivale a $\alpha-\beta \geq k+2$. Portanto, B_f é da forma $\sum i_1 \dots i_{\alpha-\beta} 0$.
- (ii) Se $1 \leq r < n$, por hipótese, $\delta^{k+1} \langle \partial f \rangle$ é equivalente a um ideal da forma $\langle x_1, \dots, x_r, h_{r+1}, \dots, h_t \rangle$, com $h_j = h_j(x_{r+1}, \dots, x_n)$ ($j = r+1, \dots, t$) e $m_n^p \langle h_{r+1}, \dots, h_t \rangle \subset m_n^{p+1} \langle \partial h_{r+1}, \dots, \partial h_t \rangle$.

Portanto, $m_n^{\alpha+p-k-1} \subset m_n^{\beta+p+1} \delta \langle x_1, \dots, x_r, h_{r+1}, \dots, h_t \rangle$.

Seguindo com o raciocínio, teremos o resultado.

Com relação à (r, k) -determinação, temos o:

1.10. COROLÁRIO: Seja $f : R^{n,0} \rightarrow R, 0$ do tipo $T.D_p$.

Se f for (r, k) -determinado, então, B_f é da forma $\sum i_1 \dots i_{k-r} 0$.

1.11. COROLÁRIO: Seja $f : R^{n,0} \rightarrow R, 0$, com $\text{cod } Rf = \text{cod } Af < \infty$ (conforme [17]).

Se $m_n^\alpha \subset m_n^\beta \langle \partial f \rangle$, então B_f é da forma

$$\sum i_1 \dots i_{\alpha-\beta} 0.$$

Demonstração: Temos que $\text{cod } Rf = \dim_R \frac{C_O(R^n)}{\langle \partial f \rangle} = \text{cod } Af =$
 $= \dim_R \frac{C_O(R^n)}{\langle \partial f \rangle + \langle f, f^2, \dots \rangle_R} < \infty$. Disto segue
 que $f \in \langle \partial f \rangle$. Logo, por Saito ([22]), temos que f é equiva-
 lente a um germe g quase-homogêneo com relação a algum θ .
 Portanto, f é do tipo T.I.Q.H.- θ , donde segue o resultado.

Utilizando ainda as técnicas de demonstração de (1.6),
 temos os seguintes corolários:

1.12. COROLÁRIO: Seja $f \in m_n^2 \subset C_O(K^n)$, do tipo T.I.Q.H.- θ
 (ou do tipo T.D_p).
 Suponhamos que $m_n^{\alpha-k} \subset m_n^{\beta_{k+1}} \delta^k \langle \partial f \rangle$, onde
 $\delta^{k_O} \langle \partial f \rangle = m_n$ e $\delta^{k_O-1} \langle \partial f \rangle \neq m_n$.
 Então, B_f é da forma $\sum i_1 \dots i_{\alpha-\beta_{k+1}} 0$
 ($k = 0, \dots, k_O$).

Demonstração: Seja $\ell \in \{0, 1, \dots, k_O\}$. Por hipótese temos
 que $m_n^{\alpha-\ell} \subset m_n^{\beta_{\ell+1}} \delta^\ell \langle \partial f \rangle$, onde podemos supor
 $\delta^\ell \langle \partial f \rangle = \langle p_1, \dots, p_t \rangle$, com $p_1, \dots, p_t$ quase-homogêneos com
 relação a θ .

Se $\ell = k_O$, então $\delta^{\ell} \langle \partial f \rangle = m_n$ e portanto, $\alpha - \beta_{k_O+1} \geq$
 $\geq k_O+1$, donde segue que B_f é da forma $\sum i_1 \dots i_{\alpha-\beta_{k_O+1}} 0$.

Seja $\ell < k_O$. Então temos $\delta^\ell \langle \partial f \rangle \neq m_n$.

A partir da inclusão $m_n^{\alpha-\ell} \subset m_n^{\beta_{\ell+1}} \delta^\ell \langle \partial f \rangle$, seguindo
 $k_O - \ell$ passos como na demonstração de (1.6), teremos $m_n^{\alpha-k_O} \subset$
 $\subset m_n^{\beta_{\ell+1}} \delta^{k_O} \langle \partial f \rangle = m_n^{\beta_{\ell+1}+1}$, donde, $\alpha - \beta_{\ell+1} \geq k_O+1$.

Sendo $\delta^{k_0}_{O<\partial f>} = m_n$, o resultado segue.

No caso de f ser do tipo $T.D_p$, a demonstração é análoga, tomando $m_n^{\alpha-k+p+1} \subset m_n^{\beta_{k+1}+p+1}_{<\partial f>}$, $k = 0, 1, \dots, k_0$.

1.13. COROLÁRIO: Seja $f \in m_n^2 \subset C_O(K^n)$, estavelmente equivalente a $g : K^2, 0 \rightarrow K, 0$, com $\partial_1 g$ e $\partial_2 g$ quase-homogêneos.

Se $m_n^\alpha \subset m_n^{\beta}_{<\partial f>}$, então B_f é da forma

$$\sum i_1 \dots i_{\alpha-\beta} 0.$$

Demonstração: Por hipótese temos que $m_2^\alpha \subset m_2^\beta_{<\partial g>}$.

Seja posto $\delta^{k_{>\partial g}} = 0$ e posto $\delta^{k+1}_{<\partial g>} = r \neq 0$. Como $\partial_1 g$ e $\partial_2 g$ são quase-homogêneos, segue que

$$m_2^{\alpha-k-1} \subset m_2^{\beta_{\delta^{k+1}_{<\partial g>}}}$$

Se $r = 2$, então, $\alpha-k-1 \geq \beta+1$, e portanto, $\alpha-\beta \geq k+2$.

Sendo $\delta^{k+1}_{<\partial g>} = m_n$, segue que B_f é da forma

$$\sum i_1 \dots i_{\alpha-\beta} 0.$$

Se $r = 1$, então $\delta^{k+1}_{<\partial g>}$ é um ideal equivalente ao ideal $\langle x, y^t \rangle$, para algum $t \geq 2$, pois, $\text{cod}_K \delta^{k+1}_{<\partial g>} < \infty$.

Nestas condições, temos que $m_2^{\alpha-k-1} \subset m_2^{\beta_{\langle x, y^t \rangle}}$, e, portanto, $\alpha-k-1 \geq \beta+t$, isto é, $\alpha-\beta \geq k+t+1$.

Como $\delta^{k+t}_{<\partial g>} = m_2$, o resultado segue.

1.14. COROLÁRIO: Seja $f \in m_n^2 \subset C_O(K^n)$ (não necessariamente com $\mu(f) < \infty$).

Se existir $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 1$, tal que, $\delta^k_{<f>}$ é do tipo $T.D_p$ e $m_n^\alpha \subset m_n^{\beta_{\delta^k_{<f>}}}$, então B_f é da

forma $\sum i_1 \dots i_{\alpha-\beta+k} 0$.

1.15. COROLÁRIO: Sejam $f \in m_n^2 \subset C_O(K^n)$ do tipo $T.D_p$, e $k_O \in \mathbb{Z}$, $k_O \geq 0$, com $\delta^{k_O+1} \langle f \rangle = m_n$ e $\delta^{t_O} \langle f \rangle \neq m_n$. Para cada $k = 0, 1, \dots, k_O$, seja $m_n^{\alpha-k} \subset m_n^{\beta} \delta^{k+1} \langle f \rangle$ com $m_n^{\alpha-k} \not\subset m_n^{\beta} \delta^{k+1} \langle f \rangle$. Então, $i_{\alpha-\beta_{k_O}} \neq 0$ e $i_{\alpha-\beta_{k_O}+1} = 0$, onde $B_f = \sum i_1 \dots$.
(Compare com III - 3.7).

1.16. COROLÁRIO: Seja $f \in m_n^2 \subset C_O(K^n)$, tal que $\langle \partial f \rangle$ é equivalente a um ideal $J = \langle g_1, \dots, g_k \rangle$, onde $g_1, g_2, \dots, g_k$ são quase-homogêneos. Se B_f for da forma $\sum n \dots n 0$ ou $\sum n \dots n 1 \dots 1 0$, e $m_n^\alpha \subset m_n^\beta \langle \partial f \rangle$, então, $|B_f| \leq \alpha - \beta$.

1.17. OBSERVAÇÕES:

Sejam $f_1, \dots, f_r \in m_n^2 \subset C_O(R^n)$ com $\dim_R \frac{C_O(R^n)}{\langle f_1, \dots, f_r \rangle} < \infty$.

Logo, por ([12]), segue que $\dim_R \frac{C_O(R^n)}{\langle f_1^r, \dots, f_n^r \rangle} < \infty$, para todo inteiro $r \geq 1$. Nestas condições, seja $k = k(n)$, tal que, $m_n^k \subset \langle f_1^n, \dots, f_n^n \rangle$.

Por ([10]), temos que $f_i^n \in \langle \partial_1 f_i, \dots, \partial_n f_i \rangle$, ($i = 1, \dots, n$).

Portanto,

$$m_n^k \langle f_1, \dots, f_n \rangle \subset \langle f_1, \dots, f_n \rangle \langle f_1^n, \dots, f_n^n \rangle \subset \\ \subset m_n^2 \langle f_1^n, \dots, f_n^n \rangle \subset m_n^2 \langle \partial f_1, \dots, \partial f_n \rangle.$$

Em resumo, temos $m_n^k \langle f_1, \dots, f_n \rangle \subset m_n^2 \langle \partial f_1, \dots, \partial f_n \rangle$.

Baseado neste fato, e nas singularidades que observamos, apresentamos a seguinte:

CONJECTURA: Seja $f \in m_n^2 \subset C_0(\mathbb{R}^n)$, com $\mu(f) < \infty$.

Então, f satisfaz a condição D_p , para algum $p \in \mathbb{Z}$, $p > 0$.

CAPÍTULO V

COMPRIMENTO DO SÍMBOLO DE BOARDMAN E O GRAU DE UM POLINÔMIO

No capítulo anterior, a nossa preocupação foi dar um limite para o comprimento do Símbolo de Boardman de um germe, em termos da (r,k) -determinação.

Durante a manipulação de exemplos, que nos levaram a intuir a referida relação, observamos que para "grande" número de polinômios, existia uma "boa" relação entre o comprimento de seu Símbolo de Boardman, e de seu grau, como por exemplo, $|B_f| \leq \text{grau}(f)$.

Diante destes fatos, nos propusemos a dar uma classe de polinômios, para a qual, vale a desigualdade $|B_f| \leq \text{grau}(f) - 1$. Existem porém polinômios com $\mu < \infty$, que não verificam esta relação (ver (1.3)).

Para tal, seja $F = \{f \in K[x,y] : f(0) = 0, f'(0) = 0 \text{ e } \mu(f) < \infty\}$.

1.1. DEFINIÇÃO: Dados $f, g \in F$, diremos que f se *reduz regu-*larmente a g , se:

- (i) $\text{grau}(g) \leq \text{grau}(f)$, e,
- (ii) f é equivalente a g (equivalência via R ou $\tilde{R}$).

1.2. OBSERVAÇÕES: A propriedade de se *reduzir regularmente*, não determina em $K[x,y]$ uma relação de equivalência. Para tal, basta observarmos que $f(x,y) = x^3 + y^4 + x^2 y^3$ se

reduz regularmente a $g(x,y) = x^3 + y^4$, sem que a recíproca valha.

Seja $C = \{f \in F : \text{se } f \text{ se reduzir regularmente a um germe da forma } x^a + h(x,y), \text{ com } h \in m_2^{a+1}, \text{ então } f \text{ se reduz regularmente a um germe da forma } x^a + x^{a-2}A_{a-2}(y) + \dots + \dots + xA_1(y) + A_0(y), \text{ onde } A_i(y) \in K[y], i = 0, 1, \dots, a-2\}$.

Antes de enunciarmos o resultado do capítulo, vejamos um exemplo.

1.3. EXEMPLO: Seja $f(x,y) = x^3 + 3x^2y^p + 3xy^{2p}$, com $p \in \mathbb{Z}, p \geq 1$.

Como f é equivalente a $g(x,y) = x^3 - y^{3p}$, segue que $|B_f| = 3p-1$, com grau $(f) = 2p+1$.

1.4. TEOREMA: Seja $f \in C$, com grau $(f) = r$.

Então, $|B_f| \leq r-1$.

Demonstração:

(I) Consideremos

$$f(x,y) = x^a + y^b + \sum_{\substack{i+j=c \\ i,j \geq 1}} \alpha_{ij} x^i y^j + \sum_{\substack{i+j > c \\ i,j \geq 1}} \beta_{ij} x^i y^j + \\ + \sum_{i > a} d_i x^i + \sum_{i > b} e_i y^i$$

onde $\alpha_{ij}, \beta_{ij}, d_i, e_i \in K, \mu(f) < \infty$ e $3 \leq a \leq b$.

Se não existirem termos mistos, então f se reduz regularmente a $x^a + y^b$, e portanto, $B_f = \underbrace{\sum 2 \dots 2}_{a-1} \underbrace{1 \dots 1}_{b-a} 0$.

Suponhamos que exista termo misto, e que,

$$D = \sum_{\substack{i+j=c \\ i,j \geq 1}} \alpha_{ij} x^i y^j$$

é a soma dos termos mistos de menor grau.

Caso (1): $3 \leq a = b$.

(i) Se $c < a$, então $f = D + h$, onde $h \in m_2^{c+1}$.

Seja i_0 o maior índice tal que, $\alpha_{i_0, c-i_0} \neq 0$. Derivando i_0 -vezes com relação a x e $(c-i_0-1)$ -vezes com relação a y , teremos que $y \in \delta^{c-1}\langle f \rangle$. Derivando (i_0-1) -vezes com relação a x e $(c-i_0)$ -vezes com relação a y , teremos em $\delta^{c-1}\langle f \rangle$ um elemento da forma $x + \theta y$, com $\theta \in K$. Logo, $\delta^{c-1}\langle f \rangle = m_2$. Como posto $\delta^{c-2}\langle f \rangle = 0$, segue que $B_f = \underbrace{\Sigma_2 \dots 2}_c 0$.

(ii) Se $a = b = c$, então, $f = x^a + y^a + D + h$, com $h \in m_2^{a+1}$. Segue então que $\delta^{a-1}\langle f \rangle$ é gerado por elementos da forma: $\ell_i + h_i, k_1, \dots, k_t$ ($i = 1, \dots, a$), onde $\ell_1, \dots, \ell_a$ são K -formas lineares em x, y e $h_1, \dots, h_a, k_1, \dots, k_t \in m_2^2$. Se existirem $i, j \in \{1, \dots, a\}$, com $i \neq j$, tais que ℓ_i e ℓ_j são K -linearmente independentes, segue que $\delta^{a-1}\langle f \rangle = m_2$. Como posto $\delta^{a-2}\langle f \rangle = 0$, tem-se $B_f = \underbrace{\Sigma_2 \dots 2}_{a-1} 0$.

Suponhamos que $\ell_1, \dots, \ell_a$ são 2 a 2 K -linearmente dependentes. Podemos supor ainda que $\ell_1, \dots, \ell_a$ são dadas por:

$$\left\{ \begin{array}{l} \ell_1 = \alpha_{a-1 \ 1} x + \alpha_{a-1 \ 1} y \\ \ell_2 = (a-1)\alpha_{a-1 \ 1} x + 2\alpha_{a-2 \ 2} y \\ \dots\dots\dots \\ \ell_{k+1} = (a-k)\alpha_{a-k \ k} x + (k+1)\alpha_{a-k-1 \ k+1} y \\ \dots\dots\dots \\ \ell_{a-1} = 2\alpha_{2 \ a-2} x + (a-1)\alpha_{1 \ a-1} y \\ \ell_a = \alpha_{1 \ a-1} x + ay \end{array} \right.$$

Seja $\alpha_{a-1 \ 1} = t = \binom{a}{1} \left(\frac{t}{a}\right)$. Portanto, $\frac{a}{t} = \frac{(a-1)t}{2\alpha_{a-2 \ 2}}$,

o que equivale a $\alpha_{a-2 \ 2} = \binom{a}{2} \left(\frac{t}{a}\right)^2$.

Suponhamos que $\alpha_{a-k \ k} = \binom{a}{k} \left(\frac{t}{a}\right)^k$, para $k=1, \dots, k_0$.

Logo,

$$\frac{(a-k+1)\alpha_{a-k+1 \ k-1}}{k\alpha_{a-k \ k}} = \frac{(a-k)\alpha_{a-k \ k}}{(k+1)\alpha_{a-k-1 \ k+1}} \iff$$

$$\iff \alpha_{a-k-1 \ k+1} = \binom{a}{k+1} \left(\frac{t}{a}\right)^{k+1}$$

Analisando agora ℓ_{a-1} e ℓ_a , teremos:

$$\begin{aligned} \frac{2\alpha_{2 \ a-2}}{(a-1)\alpha_{1 \ a-1}} &= \frac{\alpha_{1 \ a-1}}{a} \iff \cdot (a-1)\alpha_{1 \ a-1}^2 = \\ &= 2a\alpha_{2 \ a-2} \end{aligned}$$

Como,

$$\alpha_{1 \ a-1} = \binom{a}{a-1} \left(\frac{t}{a}\right)^{a-1} \quad \text{e} \quad \alpha_{2 \ a-2} = \binom{a}{a-2} \left(\frac{t}{a}\right)^{a-2}$$

segue que $\left(\frac{t}{a}\right)^a = 1$.

Portanto, $t = \pm a$, conforme a paridade de a . Nestas condições, temos que $f = (x \pm y)^a + h$.

Efetuada a mudança linear de coordenadas, dada por:

$$\psi : \begin{cases} X = x \pm y \\ Y = y \end{cases}$$

teremos que f se reduz regularmente a um polinômio da forma $x^a + g$, com $g \in m_2^{a+1}$.

Como $f \in \mathcal{C}$, segue que f se reduz regularmente a um polinômio da forma $\bar{f} = x^a + x^{a-2}A_{a-2}(y) + \dots + xA_1(y) + A_0(y)$, com $A_0, A_1, \dots, A_{a-2} \in K[y]$.

Temos que posto $\delta^{a-2}\langle \bar{f} \rangle = 0$ e que, $x \in \delta^{a-1}\langle \bar{f} \rangle$. Como $\mu(\bar{f}) < \infty$, segue que $A_1(y) \neq 0$ ou $A_0(y) \neq 0$, onde

$$A_1(y) = \beta_{a+1}^1 y^a + \beta_{a+2}^1 y^{a+1} + \dots + \beta_k^1 y^{k-1}$$

e

$$A_0(y) = \beta_{a+1}^0 y^{a+1} + \dots + \beta_k^0 y^k$$

com $\beta_j^1, \beta_\ell^0 \in K$.

Se $A_1 \neq 0$, seja j o menor índice tal que, $\beta_{j+1}^1 \neq 0$ ($j \geq a$). Logo, derivando uma vez com relação a x e $(a-2)$ -vezes com relação a y , teremos em $\delta^{a-1}\langle \bar{f} \rangle$ um elemento da forma $\beta_{j+1}^1 y^{j-a+2} + xk(x,y) + q(y)$, com $q \in m_2^{j-a+3}$. Como $x \in \delta^{a-1}\langle \bar{f} \rangle$ e $\beta_{j+1}^1 \neq 0$, segue que $y^{j-a+2} \in \delta^{a-1}\langle \bar{f} \rangle$. Por-

tanto, $B_f = \Sigma \underbrace{2 \dots 2}_{a-1} \underbrace{1 \dots 1}_m 0$, onde $m \leq j-a+1$. ($m+a-1 \leq$

$\leq j \leq \text{grau}(f)-1$).

Se $A_0 \neq 0$, seja p o menor índice tal que, $\beta_p^0 \neq 0$. ($a+1 \leq p$). Derivando $(a-1)$ -vezes com relação a y , como $\beta_p^0 \neq 0$ ($p \geq a+1$) e $x \in \delta^{a-1}\langle \bar{f} \rangle$, segue que $y^{p-a+1} \in \delta^{a-1}\langle \bar{f} \rangle$. Logo, $B_f = \Sigma \underbrace{2 \dots 2}_{a-1} \underbrace{1 \dots 1}_s 0$, com $s \leq p-a$. ($s+a-1 \leq p-1 \leq$

$\leq \text{grau}(f)-1$).

Observemos que podemos calcular um limite para $|B_f|$, através de $\min\{p, j\}$ se $A_1 \neq 0$ e $A_0 \neq 0$; através de j se $A_1 \neq 0$ e $A_0 \equiv 0$, e, através de p , se $A_1 \equiv 0$ e $A_0 \neq 0$.

(iii) Se $a = b < c$, é imediato que $B_f = \Sigma \underbrace{2 \dots 2}_{a-1} 0$.

Caso (2): $3 \leq a < b$.

(i) Se $c < a$, então, como [caso (1) - (i)], tem-se

$$B_f = \Sigma \underbrace{2 \dots 2}_{c-1} 0$$

(ii) Se $c = a$, então $f = x^a + D + h$, com $h \in m_2^{a+1}$.

Seja j o maior índice tal que, $\alpha_{a-j} \neq 0$. Derivando j -vezes em y e $(a-j-1)$ -vezes com relação a x , teremos em $\delta^{a-1}\langle f \rangle$ um elemento da forma $x+g$, com $g \in m_2^2$.

Se $j = 1$, derivando $(a-1)$ -vezes em x , teremos em $\delta^{a-1}\langle f \rangle$ um elemento da forma $ax + by + \ell$, com $\ell \in m_2^2$ e $b \neq 0$.

Se $j \geq 2$, derivando $(j-1)$ -vezes em y e $(a-j)$ -vezes em x , teremos em $\delta^{a-1}\langle f \rangle$, um elemento da forma $\alpha_{a-j} y^j + dx + q$, com $d \in K$, $q \in m_2^2$. Portanto, qualquer que seja a hipótese sobre j , como $\alpha_{a-j} y^j \neq 0$, segue que $\delta^{a-1}\langle f \rangle = m_2$. Sendo posto $\delta^{a-2}\langle f \rangle = 0$, segue que $B_f = \underbrace{\Sigma 2 \dots 2}_{a-1} 0$.

(iii) Se $a < c$, como $f \in C$, tem-se que B_f é da forma $\Sigma \underbrace{2 \dots 2}_{a-1} \underbrace{1 \dots 1}_m 0$, com $a+m-1 \leq \text{grau}^\circ(f)-1$, conforme [caso

(1) - (ii)].

Aproveitemos para fazer uma análise extra-teorema, do caso $a < b \leq c$. Primeiramente, seja $a < b = c$. Derivando $(a-1)$ -vezes com relação a x , teremos em $\delta^{a-1}\langle f \rangle$, um elemento da forma:

$$h_1 = a!x + x^2k(x) + (a-1)!\alpha_{a-1} b-a+1 y^{b-a+1} + \\ + a!\alpha_a b-a xy^{b-a} + \dots + \frac{(b-1)!}{(b-a)!}\alpha_{b-1} 1 x^{b-a} y + p_1$$

com $p_1 \in m_2^{b-a+2}$.

Derivando $(a-1)$ -vezes com relação a y , teremos em $\delta^{a-1}\langle f \rangle$, um elemento da forma:

$$h_2 = \frac{b!}{(b-a+1)!} y^{b-a+1} + \frac{(b-1)!}{(b-a)!}\alpha_1 b-1 xy^{b-a} + \\ + \frac{(b-2)!}{(b-a-1)!}\alpha_2 b-2 x^2 y^{b-a-1} + \dots + (a-1)!\alpha_{b-a+1} a-1 x^{b-a+1} + \\ + p_2$$

com $p_2 \in m_2^{b-a+2}$.

Considerando a mudança de coordenadas, dada por

$$\psi : \begin{cases} X = h_1 \\ Y = y \end{cases}$$

teremos que $\delta^{a-1}\langle f \rangle$ é equivalente ao ideal $\langle x, y^{b-a+1} \rangle$. Por

$$\text{tanto, } B_f = \underbrace{\sum 2 \dots 2}_{a-1} \underbrace{1 \dots 1}_{b-a} 0.$$

Se $a < b < c$, então, do mesmo modo tem-se

$$B_f = \underbrace{\sum 2 \dots 2}_{a-1} \underbrace{1 \dots 1}_{b-a} 0$$

Voltemos à demonstração do teorema.

(II) Consideremos

$$\begin{aligned} f(x, y) = & x^a + xy^{b-1} + \sum_{\substack{i+j=c \\ i, j \geq 1}} \alpha_{ij} x^i y^j + \sum_{\substack{i+j > c \\ i, j \geq 1}} \beta_{ij} x^i y^j + \\ & + \sum_{i > a} d_i x^i + \sum_{i > b} e_i y^i \end{aligned}$$

onde $\alpha_{ij}, \beta_{ij}, d_i, e_i \in K$, $\mu(f) < \infty$ e $3 \leq a \leq b$.

Suponhamos que o único termo misto de f , é xy^{b-1} .
Então, $f(x, y) = x^a + xy^{b-1} + \sum_{i > a} d_i x^i + \sum_{i > b} e_i y^i$.

Se $a < b$, então, posto $\delta^{a-2}\langle f \rangle = 0$ e $\delta^{a-1}\langle f \rangle = \langle x, y^{b-a+1} \rangle$, donde se conclui que $B_f = \underbrace{\sum 2 \dots 2}_{a-1} \underbrace{1 \dots 1}_{b-a} 0$

Se $a = b$, então, posto $\delta^{a-2}\langle f \rangle = 0$ e $\delta^{a-1}\langle f \rangle = m_2$,

e então, $B_f = \underbrace{\Sigma_2 \dots 2}_a 0$.

Se $a > b$, então, $f(x,y) = xy^{b-1} + h$, com $h \in m_2^{b+1}$.

Logo, $B_f = \underbrace{\Sigma_2 \dots 2}_b 0$, pois, $\delta^{b-1}\langle f \rangle = m_2$.

Suponhamos que exista termo misto além de xy^{b-1} , e que $D = \sum_{\substack{i+j=c \\ i,j \geq 1}} \alpha_{ij} x^i y^j$ é a soma dos termos mistos de menor grau.

Caso (1): $a = b \geq 3$.

(i) Se $c < a$, então, por [I - caso (1) - (i)], segue que $B_f = \underbrace{\Sigma_2 \dots 2}_c 0$.

(ii) Se $c = a$, então, $f(x,y) = x^a + xy^{a-1} + D + h$, com $h \in m_2^{a+1}$. Se $\alpha_{1 a-1} \neq -1$, então por [I - caso (2) - (ii)], segue que $B_f = \underbrace{\Sigma_2 \dots 2}_a 0$. Suponhamos que $\alpha_{1 a-1} = -1$. Se

$D + xy^{a-1} \neq 0$, então, também por [I - caso (2) - (ii)], tem-se $B_f = \underbrace{\Sigma_2 \dots 2}_a 0$. Por outro lado, se $D = -xy^{a-1}$, então

$f = x^a + p$, com $p \in m_2^{a+1}$. Pelo fato de termos $f \in \mathcal{C}$, então, por [I - caso (1) - (ii)], segue que $B_f = \underbrace{\Sigma_2 \dots 2}_a \underbrace{1 \dots 1}_m 0$,

com $m+a-1 \leq \text{grau}(f)-1$.

(iii) Se $a < c$, então $f = x^a + xy^{a+1} + h$, com $h \in m_2^{a+1}$.

Logo, por [I - caso (2) - (ii)], tem-se $B_f = \underbrace{\Sigma 2 \dots 2}_{a-1} 0$.

Caso (2): $3 \leq a < b$

(i) Se $c < a$, então $B_f = \underbrace{\Sigma 2 \dots 2}_{c-1} 0$.

(ii) Se $c = a$, então $f = x^a + D + h$, com $h \in m_2^{a+1}$, e portanto, $B_f = \underbrace{\Sigma 2 \dots 2}_{a-1} 0$.

(iii) Se $a < c$, como $f \in C$, então $B_f = \underbrace{\Sigma 2 \dots 2}_{a-1} \underbrace{1 \dots 1}_m 0$,

com $a+m-1 \leq \text{grau}(f)-1$.

Registremos apenas que no caso $a < b < c$, temos $B_f = \underbrace{\Sigma 2 \dots 2}_{a-1} \underbrace{1 \dots 1}_{b-a} 0$.

Caso (3): $3 \leq b < a$.

Como nos casos já vistos, tem-se $|B_f| \leq \text{grau}(f)-1$.

(III) Consideremos

$$f(x,y) = xy^{a-1} + yx^{b-1} + \sum_{\substack{i+j=c \\ i,j \geq 1}} \alpha_{ij} x^i y^j + \\ + \sum_{\substack{i+j>c \\ i,j \geq 1}} \beta_{ij} x^i y^j + \sum_{i>b} d_i x^i + \sum_{i>a} e_i y^i$$

onde $\alpha_{ij}, \beta_{ij}, d_i, e_i \in K$, $\mu(f) < \infty$ e $3 \leq a \leq b$.

Se os únicos termos mistos de f forem xy^{a-1} e yx^{b-1} , então, $B_f = \underbrace{\Sigma 2 \dots 2}_{m-1} 0$, onde $m = \min\{a, b\}$.

Suponhamos que além de xy^{a-1} e yx^{b-1} , exista termo misto, e seja $D = \sum_{\substack{i+j=c \\ i, j \geq 1}} \alpha_{ij} x^i y^j$, a soma dos de menor grau.

Caso (1): $a = b$.

(i) Se $c < a$, então $B_f = \underbrace{\Sigma 2 \dots 2}_{c-1} 0$.

(ii) Se $a \leq c$, então $B_f = \underbrace{\Sigma 2 \dots 2}_{a-1} 0$.

Caso (2): $a < b$.

(i) Se $c < a$, então $B_f = \underbrace{\Sigma 2 \dots 2}_{c-1} 0$.

(ii) Se $a \leq c$, então $B_f = \underbrace{\Sigma 2 \dots 2}_{a-1} 0$.

Para encerrar a demonstração do teorema, observemos que, se $a = 2$ nas três formas consideradas, então, ou f é um representante de um germe de Morse, e aí, nossa desigualdade é verdadeira, ou f é equivalente a um polinômio da forma $\pm x^2 \pm y^k$, com $k \geq 3$, para o qual, nossa desigualdade pode não valer. Como estamos considerando $f \in \mathcal{C}$, então f se reduz regularmente a $\pm x^2 \pm y^k$, com $k \leq \text{grau}(f)$, e portanto, nossa desigualdade se verifica.

1.5. OBSERVAÇÕES:

(1) Observando a demonstração, constata-se que provamos a validade de nossa desigualdade para um grande número de polinômios não pertencentes a $\mathcal{C}$.

(2) Para f numa das formas $\pm x^a \pm y^b + \Delta$, $\pm x^a \pm xy^b + \Delta$ ou $\pm xy^b \pm x^a y + \Delta$, os cálculos são análogos aos registrados.

(3) Se $f(x,y) = x^a + h(x,y)$, onde $h(x,y)$ é um polinômio de grau $\geq a+1$, então por Lu ([15]), existe uma mudança de coordenadas, na qual f se expressa na forma $x^a + x^{a-2}A_{a-2}(y) + \dots + xA_1(x) + A_0(y)$. Se $\mu(f) < \infty$, então podemos supor que a nova expressão de f é polinomial. Acontece, que nem sempre o seu grau é menor ou igual ao grau de f .

(4) O exemplo (1.3) mostra que a condição $f \in \mathcal{C}$, é uma condição indispensável para os nossos propósitos.

(5) Para n variáveis ($n \geq 3$), encontrar uma boa classe de polinômios para a qual valha a referida desigualdade, é uma questão mais delicada, como mostra o seguinte exemplo:

$$f : K^3 \rightarrow K, \quad f(x,y,z) = x^2 + 2xy^3 + z^2$$

Temos $\text{grau}(f) = 4$ e $B_f = \sum 3 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0$, pois f é equivalente a $x^2 + z^2 - y^6$.

No que segue, vamos exibir uma classe P de polinômios de $K[x_1, \dots, x_n]$ ($K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), e uma função $h: \{2, 3, \dots\} \rightarrow \mathbb{N}$, tal que, $|B_f| \leq h(\text{grau } f)$, para todo $f \in P$.

Antes porém, vamos registrar alguns conceitos encontrados em [12].

1.6. DEFINIÇÃO: Um polinômio $f \in K[x_1, \dots, x_n]$ diz-se *cômodo* se para todo $i \in \{1, \dots, n\}$, existir na expressão de f um monômio da forma $x_i^{a_i}$, com coeficiente não nulo ($a_i \in \mathbb{Z}$, $a_i \geq 1$).

Dado $m \in \mathbb{N}^n$, $m = (m_1, \dots, m_n)$, denotaremos $x^m = x_1^{m_1} \dots x_n^{m_n}$.

1.7. DEFINIÇÃO: Dado $f \in K[x_1, \dots, x_n]$, $f = \sum_{m \in \mathbb{N}^n} a_m x^m$, denotaremos por $\text{supp}(f)$, o conjunto descrito por $\{m \in \mathbb{N}^n : a_m \neq 0\}$.

1.8. DEFINIÇÃO: Dado $f \in K[x_1, \dots, x_n]$, denotaremos por $\Gamma_+(f)$ ao menor convexo de $\mathbb{R}_+^n$ (n -uplas de números reais não negativos) que contém o conjunto $U(m + \mathbb{R}_+^n)$ onde $m \in \text{supp}(f) - 0$. Pela *frenteira de Newton* de f , entenderemos o poliedro $\Gamma(f)$ dado pela reunião das faces compactas do poliedro $\Gamma_+(f)$. Pela *parte principal newtoniana* de f , entenderemos o polinômio

$$f_0 = \sum_{m \in \Gamma(f)} a_m x^m.$$

Seja Δ uma face compacta de $\Gamma(f)$, onde

$$f \in K[x_1, \dots, x_n], \quad f = \sum_{m \in \mathbb{N}^n} a_m x^m$$

Coloquemos $f_\Delta = \sum_{m \in \Delta \cap \mathbb{N}^n} a_m x^m$

1.9. DEFINIÇÃO: Dado $f \in K[x_1, \dots, x_n]$, $f = \sum_{m \in \mathbb{N}^n} a_m x^m$, diremos que f é *não-degenerado* se para cada face compacta Δ de $\Gamma(f)$, $(x_1 \partial_1 f)_\Delta, \dots, (x_n \partial_n f)_\Delta$ não se anulam ao mesmo tempo em $(C-0)^n$.

1.10. OBSERVAÇÕES:

(1) Se $f \in K[x_1, \dots, x_n]$ for cômodo com parte principal newtoniana não degenerada, então $\mu(f) < \infty$ (consequência de [12], Teorema A.I.).

(2) Se $f \in K[x_1, \dots, x_n]$ for cômodo, com $\mu(f) < \infty$, então, não necessariamente f é não-degenerado, como podemos constatar pelo polinômio $f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz$.

Seja $\mathcal{P}$ o conjunto dos polinômios cômodos não-degenerados f de $K[x_1, \dots, x_n]$, com $f(0) = 0$ e $f'(0) = 0$, ($n \geq 2$).

Para esta classe de polinômios, temos o:

1.11. TEOREMA: Existe uma função $h : \{2, 3, \dots\} \rightarrow \mathbb{N}$, tal que, $|B_f| \leq h(\text{grau } f)$, para todo $f \in \mathcal{P}$.

Demonstração: Seja $\Gamma_-(f)$ a reunião dos segmentos com extremidades em $0 \in \mathbb{R}^n$ e $\Gamma(f)$, conforme [12].

Pelo Teorema I de [12], temos que

$$\mu(f) = n!V_n - (n-1)!V_{n-1} + \dots + 1!(-1)^{n-1}V_1 + (-1)^n$$

onde V_n é o volume de dimensão n do poliedro $\Gamma_-(f)$, e, para cada $1 \leq q \leq n-1$, V_q é a soma dos volumes de dimensão q das intersecções do poliedro $\Gamma_-(f)$ com os planos de coordenadas de dimensão q .

Logo,

$$\mu(f) \leq \begin{cases} n!V_n + (n-2)!V_{n-2} + \dots + 2V_2 + 1 & \text{se } n \text{ par} \\ n!V_n + (n-2)!V_{n-2} + \dots + 3!V_3 + V_1 & \text{se } n \text{ ímpar} \end{cases}$$

Seja grau $(f) = \delta$. Então, temos que:

$$\mu(f) < \begin{cases} \delta^n + \binom{n}{2}\delta^{n-2} + \binom{n}{4}\delta^{n-4} + \dots + \binom{n}{n-2}\delta^2 + 1 & \text{se } n \text{ par,} \\ \delta^n + \binom{n}{2}\delta^{n-2} + \binom{n}{4}\delta^{n-4} + \dots + \binom{n}{n-1}\delta & \text{se } n \text{ ímpar} \end{cases}$$

Tomando $h : \{2, 3, \dots\} \rightarrow \mathbb{N}$ definida por

$$h(\delta) = \begin{cases} \sum_{i=0}^{r-2} \binom{n}{2i}\delta^{n-2i} + 2 & \text{se } n \text{ par, onde } r = \frac{n-2}{2} \\ \sum_{i=0}^{s-1} \binom{n}{2i}\delta^{n-2i} + 1 & \text{se } n \text{ ímpar, onde } s = \frac{n-1}{2} \end{cases}$$

teremos por [14] que $|B_f| \leq h(\text{grau } f)$ se $f \in \mathcal{P}$.

- [1] - ARNOL'D, V.I. - Normal forms of functions in neighbourhoods of degenerate critical points - Russian Math. Surveys, 29 : 2 (1974).
- [2] - ARNOL'D, V.I. - Normal forms for functions near degenerate critical points, the weyl groups of A_k , D_k , E_k and lagrangian singularities - Funct. Anal. Appl., 6 (1973).
- [3] - ARNOL'D, V.I. - Classification of unimodal critical points of functions - Funct. Anal. Appl., 7 (1973).
- [4] - ARNOL'D, V.I. - Classification of bimodal critical points of functions - Funct. Anal. Appl., 9 (1974).
- [5] - ARNOL'D, V.I. - Critical points of smooth functions and their normal forms - Russian Math. Surveys, 30 : 5 (1975).
- [6] - BOARDMAN, J.M. - Singularities of differentiable maps - IHES, n.^o 33 (1967).
- [7] - DAMON, J. e GALLIGO, A. - A topological invariant for stable map germs. (preprint).
- [8] - GABRIÉLOV, A.M. - Bifurcations, Dynkin diagrams, and modality of isolated singularities - Funct. Anal. Appl., 8 (1974).
- [9] - GABRIÉLOV, A.M. e KUSHNIRENKO, A.G. - Description of deformations with constant Milnor number for homogeneous functions - Funct. Anal. Appl., 9 (1974).
- [10] - KRAMER, K. - An example in the singularities of mappings - Topology 13 (1974).
- [11] - KUO, T.C. - A complete determination of C^0 -sufficiency in $J^r(2,1)$ - Inv. Math., 8 (1969).
- [12] - KUSHNIRENKO, A.G. - Polyèdres de Newton et nombres de Milnor - Inv. Math., 32 (1976).
- [13] - LEVINE, H.I. e EISENBUD, D. - An algebraic formula for the degree of a C^∞ map germ - Annals of Math., 106 (1977).

- [14] - LOIBEL, G.F. e TADINI, W.M. - Finite determinated germs and the Boardman's Symbol - Anais Acad. Brasil. Ci., 49 (1978).
- [15] - LU, Y.C. - Sufficiency of Jets in $J^r(2,1)$ via decomposition - Inv. Math., 10 (1970).
- [16] - MARTINET, J. - Singularités des Fonctions et Applications Différentiables - Monografias de Matemática da PUC/RJ, n.º 1.
- [17] - MATHER, J.N. - Stability of C^∞ mappings, III: Finitely determined map-germs - IHES, 35 (1968).
- [18] - MATHER, J.N. - On Thom-Boardman singularities - Dynamical Systems, M. M. Peixoto, Univ. Bahia, Brasil, (1973).
- [19] - MILNOR, J. e ORLIK, P. - Isolated singularities defined by weighted homogeneous polynomials - Topology 9 (1970).
- [20] - ORLIK, P. - Singularities and group actions - Am. Math. Soc., (1979).
- [21] - RAND, D. - Arnold's classification of simple singularities of smooth functions - Math. Inst. Univ. of Warwick, Coventry (1977).
- [22] - SAITO, K. - Quasihomogene isolierte singularitäten von hyperflächen - Inv. Math., 14 (1971).
- [23] - SIERSMA, D. - Classification and Deformation of Singularities - Amsterdam (1974).
- [24] - YOSHINAGA, E. e SUZUKI, M. - Normal forms of non-degenerate quasihomogeneous functions with inner modality ≤ 4 - Inv. Math., 55 (1979).
- [25] - WASSERMANN, G. - Stability of Unfoldings - Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, 393, (1974).
- [26] - POSTON, T. e STEWART, I.N. - Taylor Expansions and Catastrophes - Research Notes in Mathematics, Pitman Publishing (1977).

1.10. COROLÁRIO: Seja $f \in m_n \subset C_0(R^n)$ tal que, $f(x_1, \dots, x_n) = f_{a_1}(x_1, \dots, x_{r_1}) + f_{a_2}(x_{r_1+1}, \dots, x_{r_2}) + \dots + f_{a_k}(x_{r_{k-1}+1}, \dots, x_n)$ com $\mu(f) < \infty$ e $3 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_k$ inteiros e f_{a_i} é homogênea do grau a_i , $i = 1, \dots, k$; ($n \geq 2$). Então, f é (r, s) -determinado se $a_1 \geq 4$, e $(r+1, s+1)$ -determinado se $a_1 = 3$, onde $s = r_1(a_1-2) + (r_2-r_1)(a_2-2) + \dots + (n-r_{k-1})(a_k-2)$ e $r = s - a_k + 1$.

Demonstração:

Como:

$$m_{r_1}^{r_1(a_1-2)+1} \subset \langle \partial f_{a_1} \rangle, \text{ nas variáveis } x_1, \dots, x_{r_1}$$

$$m_{r_i-r_{i-1}}^{(r_i-r_{i-1})(a_i-2)+1} \subset \langle \partial f_{a_i} \rangle, \text{ nas variáveis } x_{r_{i-1}+1}, \dots, x_{r_i} \quad (i \neq 1, k)$$

$$m_{n-r_{k-1}}^{(n-r_{k-1})(a_k-2)+1} \subset \langle \partial f_{a_k} \rangle, \text{ nas variáveis } x_{r_{k-1}+1}, \dots, x_n,$$

lembrando que $\mu(f) < \infty$,

segue que $m_n^{s+1} \subset \langle \partial f_{a_1}, \dots, \partial f_{a_k} \rangle$

conforme (III - 2.3), segue que $m_n^{s+1} \subset m_n^{(s+1)-a_k+1} \langle \partial f_{a_1}, \dots, \partial f_{a_k} \rangle$

Consideremos dois casos:

(i) $a_1 = 3$.

Se $r_1 = n$, isto é, f homogênea do grau a_1 , segue que $s = n(a_1 - 2)$, e então, que

$$(s+1) - a_k = (s+1) - a_1 = n(a_1 - 2) + 1 - a_1 = n - 2 \geq 0$$

Portanto, f é $(r+1, s+1)$ -determinado.

Suponhamos $r_1 < n$.

Como $m_{n-r_{k-1}}^{(n-r_{k-1})(a_k-2)+1} < m_{n-r_{k-1}}^{(n-r_{k-1})(a_k-2)-a_k+2} < \partial f_{a_k} >$,

nas variáveis $x_{r_{k-1}+1}, \dots, x_n$, segue que

$$(n-r_{k-1})(a_k-2) - a_k + 2 \geq 0.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} s+1-a_k &= [(r_2-r_1)(a_2-2) + \dots + (r_{k-1}-r_{k-2})(a_{k-1}-2)] + \\ &\quad + [r_1(a_1-2)-1] + [(n-r_{k-1})(a_k-2)-a_k+2] \geq 0, \end{aligned}$$

pois as três parcelas são não negativas.

Logo, f é $(r+1, s+1)$ -determinado.

(ii) $a_1 \geq 4$.

Conforme análise de (i), segue que $s+1-a_k \geq 1$, donde a (r, s) determinação de f .

OBSERVAÇÕES: f não é $(s-1)$ -determinado.

De fato:

Temos que f é quase-homogênea não degenerada, do tipo $(1; \underbrace{\frac{1}{a_1}, \dots, \frac{1}{a_1}}_{r_1}, \dots, \underbrace{\frac{1}{a_i}, \dots, \frac{1}{a_i}}_{r_i - r_{i-1} \ (i \neq 1, k)}, \dots, \underbrace{\frac{1}{a_k}, \dots, \frac{1}{a_k}}_{n - r_{k-1}})$.

Seja B uma base monomial para $\frac{C_0(R^n)}{\langle \partial f \rangle}$, e $g \in B$, o único elemento de B , cujo grau com relação aos pesos dados acima é

$$d_{\max} = \frac{1}{a_1}[r_1(a_1-2)] + \frac{1}{a_2}[(r_2-r_1)(a_2-2)] + \dots + \\ + \frac{1}{a_{k-1}}[(r_{k-1}-r_{k-2})(a_{k-1}-2)] + \frac{1}{a_k}[(n-r_{k-1})(a_k-2)].$$

Seja $g = x_1^{t_1} \dots x_{r_1}^{t_{r_1}} \dots x_\ell^{t_\ell} \dots x_n^{t_n}$. Logo,

$$d_{\max} = \frac{1}{a_1} \sum_{i=1}^{r_1} t_i + \frac{1}{a_2} \sum_{i=r_1+1}^{r_2} t_i + \dots + \\ + \frac{1}{a_{k-1}} \sum_{i=r_{k-2}+1}^{r_{k-1}} t_i + \frac{1}{a_k} \sum_{i=r_{k-1}+1}^n t_i$$

Logo,

$$\frac{1}{a_1}[r_1(a_1-2) - \sum_{i=1}^{r_1} t_i] + \frac{1}{a_2}[(r_2-r_1)(a_2-2) - \sum_{i=r_1+1}^{r_2} t_i] + \dots + \\ + \frac{1}{a_{k-1}}[(r_{k-1}-r_{k-2})(a_{k-1}-2) - \sum_{i=r_{k-2}+1}^{r_{k-1}} t_i] + \\ + \frac{1}{a_k}[(n-r_{k-1})(a_k-2) - \sum_{i=r_{k-1}+1}^n t_i] = 0$$

Suponhamos que na expressão acima, exista uma parcela não nula. Logo, existirá pelo menos uma parcela negativa. Vamos supor sem perda de generalidade, que $\frac{1}{a_1}[r_1(a_1-2) - \sum_{i=1}^{r_1} t_i] < 0$.

Logo, $\sum_{i=1}^{r_1} t_i \geq r_1(a_1-2)+1$. Portanto, $x_1^{t_1} \dots x_{r_1}^{t_{r_1}} \in \langle \partial f \rangle_{a_1}$,

donde segue que $g \in \langle \partial f \rangle$, que é uma contradição, pois g é básico.

Portanto, todas as parcelas são nulas.

Nestas condições, segue que $s = \sum_{i=1}^n t_i$.

Portanto, $g \in m_n^s$, donde concluímos que $m_n^s \not\subset \langle \partial f \rangle$, e então, que f não é $(s-1)$ -determinado.

2.4. COROLÁRIO: Seja $f(x_1, \dots, x_n) = f_{a_1}(x_1, \dots, x_{r_1}) +$
 $+ f_{a_2}(x_{r_1+1}, \dots, x_{r_2}) + \dots + f_{a_k}(x_{r_{k-1}+1}, \dots, x_n)$ com
 $\mu(f) < \infty$, $4 \leq a_1 < \dots < a_k$ inteiros e f_{a_i}
homogênea do grau a_i ($i = 1, \dots, k$). Considere-
remos $f_\lambda = f + \psi_\lambda$, onde $\psi_\lambda = h_\lambda + \psi$, com
 $h_\lambda \in H_{a_k}(n, 1)$ e $\psi \in m_n^{a_k+1}$, uma família de
germes a m -parâmetros $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in U \subset \mathbb{R}^m$,
 U aberto contendo $0 \in \mathbb{R}^m$.
Então, existe uma bola aberta $B(0, \varepsilon) \subset U$ com
centro em $0 \in \mathbb{R}^m$ e raio $\varepsilon > 0$ suficientemen-
te pequeno tal que, para $\lambda \in B(0, \varepsilon)$ tem-se f_λ
 (r, s) -determinado, onde (r, s) são dados por
(1.10).

CAPÍTULO III

1.2. DEFINIÇÃO:

(iv) f admite uma semi-bom-decomposição, se f for equivalente a um germe da forma $f_{a_1}(x_1, \dots, x_{r_1}) + f_{a_2}(x_{r_1+1}, \dots, x_{r_2}) + \dots + f_{a_k}(x_{r_{k-1}+1}, \dots, x_n) + h(x_1, \dots, x_n)$, onde $f_{a_1}, \dots, f_{a_k}$ são como em (iii), $h \in m_n^{a_k+1}$ e $m_n^\sigma \not\subset \langle \partial f, f \rangle$, onde $\sigma = r_1(a_1-2) + (r_2-r_1)(a_2-2) + \dots + (r_{k-1}-r_{k-2})(a_{k-1}-2) + (n-r_{k-1})(a_k-2)$.

1.5. COROLÁRIO:

onde se lê: se f admitir uma semi-bom-decomposição da forma ...

leia-se: se f for equivalente a um germe da forma ...

1.4. COROLÁRIO:

onde se lê: se f admitir uma semi-bom-decomposição da forma ...

leia-se: se f for equivalente a um germe da forma ... não necessariamente com $m_n^\sigma \not\subset \langle \partial f, f \rangle$, segue que ...

1.15. OBSERVAÇÕES:

onde se lê: Portanto, a hipótese de semi-bom-decomposição é indispensável em (1.14)

leia-se: Portanto, as hipóteses de (1.14) são indispensáveis.

2.3. PROPOSIÇÃO:

na demonstração:

onde se lê: Como f_{a_i} é homogênea Logo,

$$m_n^\sigma \not\subset \langle \partial f, f \rangle + m_n^{\sigma+1}$$

leia-se: Seja $\sigma = r_1(a_1-2) + (r_2-r_1)(a_2-2) + \dots + (r_{k-1}-r_{k-2})(a_{k-1}-2) + (n-r_{k-1})(a_k-2)$. Logo, por hipótese temos que $m_n^\sigma \not\subset \langle \partial f, f \rangle + m_n^{\sigma+1}$.

4.5. COROLÁRIO: (sem efeito)

TEOREMA: Seja $f \in m_n^2 \subset C_0(R^n)$ com $\mu(f) < \infty$ e tal que, a matriz Hessiana de f em 0 , tem característica $n-1$ ou $n-2$ ($n \geq 2$).

Então, f admite uma semi-bom-decomposição, se e somente se, $i_{\lambda_0} \neq 0$ e $i_{\lambda_0+1} = 0$.

Demonstração:

É suficiente provarmos que, se $f \in m_2^3$, for tal que $i_{\lambda_0} \neq 0$, $i_{\lambda_0+1} = 0$ e $\mu(f) < \infty$, então f admite uma semi-bom-decomposição.

Como $f \in m_2^3$ e $\mu(f) < \infty$, segue que B_f tem uma das

seguintes formas:

$$(i) \underbrace{\Sigma_2 \dots 2}_a 0 \quad \text{com} \quad a = \lambda_0.$$

$$(ii) \underbrace{\Sigma_2 \dots 2}_{a-1} \underbrace{1 \dots 1}_s 0 \quad \text{com} \quad \lambda_0 = s+a-1.$$

Caso (i):

Como $B_f = \Sigma_2 \underbrace{\dots 2}_a 0$, segue que $f = h_{a+1} + \psi$, onde

h_{a+1} é homogênea do grau $a+1$ e $\psi \in m_2^{a+2}$.

Existe $\beta \in \{0, 1, \dots\}$, tal que, $m_2^{\lambda_0 + \beta} \subset m_2^{\beta \langle \partial f, f \rangle}$,

onde $\lambda_0 + \beta = \alpha(f)$ e $\beta = \beta(f)$.

Portanto, $m_2^{a+\beta} \subset m_2^{\beta \langle \partial(h_{a+1} + \psi), h_{a+1} + \psi \rangle} + m_2^{a+\beta+1}$.

Como $\psi \in m_2^{a+2}$ e $h \in m_2^{a+1}$, segue que $m_2^{a+\beta} \subset m_2^{\beta \langle \partial h_{a+1} \rangle}$.

Portanto, $h_{a+1} = h_{a+1}(x, y)$ é não-degenerada.

Suponhamos agora que $m_2^\sigma \subset \langle \partial f, f \rangle$, onde $\sigma = 2(a-1)$.

Como $\lambda_0 + \beta = \alpha(f)$ e $\beta = \beta(f)$, segue que $\lambda_0 + \beta \leq \sigma$.

Logo, de

$$m_2^{\lambda_0 + \beta} \subset m_2^{\beta \langle \partial f, f \rangle} + m_2^{\lambda_0 + \beta + 1}, \quad \text{segue que}$$

$$m_2^\sigma \subset m_2^{\sigma - \lambda_0 \langle \partial f, f \rangle} + m_2^{\sigma + 1}, \quad \text{isto é,}$$

$$m_2^\sigma \subset m_2^{\sigma - a \langle \partial(h_{a+1} + \psi), h_{a+1} + \psi \rangle} + m_2^{\sigma + 1}.$$

Desta última inclusão, segue que $m_2^\sigma \subset m_2^{\sigma - a \langle \partial h_{a+1} \rangle}$, e então, que $m_2^\sigma \subset \langle \partial h_{a+1} \rangle$. Mas isto é um absurdo.

Portanto, f admite uma semi-bom-decomposição.

Caso (ii):

Como $B_f = \sum \underbrace{2 \dots 2}_{a-1} \underbrace{1 \dots 1}_s 0$, segue que $f = h_a + \psi$

onde h_a é homogênea do grau a e $\psi \in m_2^{a+1}$. Como posto $\delta^{a-1} \langle f \rangle = 1$, segue por (V - (1.4) - I (ii)) que existe um sistema de coordenadas, no qual f se expressa na forma $x^a + \psi(X, Y)$, com $\psi \in m_2^{a+1}$.

Por ([15]), podemos supor que f se expressa na forma:

$$f(x, y) = x^a + x^{a-2} A_{a-2}(y) + \dots + x A_1(y) + A_0(y)$$

com $A_{a-2}, \dots, A_1$ e A_0 , polinômios em y , pois $\mu(f) < \infty$.

Por outro lado, temos que:

$$\begin{aligned} \delta^{a-1} \langle f \rangle &= \\ &= \langle x, \frac{\partial}{\partial y} A_{a-2}(y), \frac{\partial^2}{\partial y^2} A_{a-3}(y), \dots, \frac{\partial^{a-2}}{\partial y^{a-2}} A_1(y), \frac{\partial^{a-1}}{\partial y^{a-1}} A_0(y) \rangle \end{aligned}$$

Suponhamos que:

$$\left\{ \begin{array}{l} A_{a-2}(y) = \alpha_{a-2} y^{\beta_{a-2}} + \psi_{a-2}, \quad \text{onde } \psi_{a-2} \in m_2^{\beta_{a-2}+1} \quad e \\ \beta_{a-2} \geq 3 \\ \\ A_{a-3}(y) = \alpha_{a-3} y^{\beta_{a-3}} + \psi_{a-3}, \quad \text{onde } \psi_{a-3} \in m_2^{\beta_{a-3}+1} \quad e \\ \beta_{a-3} \geq 4 \\ \\ \dots\dots\dots \\ A_1(y) = \alpha_1 y^{\beta_1} + \psi_1, \quad \text{onde } \psi_1 \in m_2^{\beta_1+1} \quad e \quad \beta_1 \geq a \\ A_0(y) = \alpha_0 y^{\beta_0} + \psi_0, \quad \text{onde } \psi_0 \in m_2^{\beta_0+1} \quad e \quad \beta_0 \geq a+1 \end{array} \right.$$

Sendo $B_f = \underbrace{2 \dots 2}_{a-1} \underbrace{1 \dots 1}_s 0$, segue que:

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta_{a-2} \geq s+2 \\ \beta_{a-3} \geq s+3 \\ \vdots \\ \beta_1 \geq a+s-1 \\ \beta_0 \geq a+s \end{array} \right.$$

Sendo $i_{\lambda_0} \neq 0$ e $i_{\lambda_0+1} = 0$, então, segue que $\lambda_0 = a+s-1$

e existe $\beta \in \{0, 1, 2, \dots\}$, tal que, $\lambda_0 + \beta = \alpha(f)$ e $\beta = \beta(f)$.

Portanto,

$$m_2^{\lambda_0 + \beta} \subset m_2^{\beta} \langle \partial f, f \rangle + m_2^{\lambda_0 + \beta + 1}$$

donde,

$$\begin{aligned} m_2^{a+\beta+s-1} \subset m_2^{\beta} \langle ax^{a-1} + (a-2)x^{a-3}A_{a-2}(y) + \dots + 2xA_2(y) + A_1(y), \\ (\alpha_{a-2}\beta_{a-2}x^{a-2}y^{\beta_{a-2}-1} + x^{a-2}\frac{\partial}{\partial y}\psi_{a-2}) + \\ + (\alpha_{a-3}\beta_{a-3}x^{a-3}y^{\beta_{a-3}-1} + x^{a-3}\frac{\partial}{\partial y}\psi_{a-3}) + \dots + \\ + (\alpha_1\beta_1xy^{\beta_1-1} + x\frac{\partial}{\partial y}\psi_1) + \\ + (\alpha_0\beta_0y^{\beta_0-1} + \frac{\partial}{\partial y}\psi_0), f \rangle + m_2^{a+\beta+s} \end{aligned}$$

Logo, na inclusão acima, os únicos monômios de $A_{a-2}, \dots, A_0$ que interessam, são:

$$\alpha_{a-2}y^{s+2}, \alpha_{a-3}y^{s+3}, \dots, \alpha_1y^{a+s-1} \text{ e } \alpha_0y^{a+s} \text{ de } A_{a-2}, \dots, A_0$$

respectivamente. Portanto,

$$\begin{aligned} m_2^{a+\beta+s-1} &\subset m_2^\beta \langle ax^{a-1} + (a-2)\alpha_{a-2}x^{a-3}y^{s+2} + (a-3)\alpha_{a-3}x^{a-4}y^{s+3} + \\ &\quad + \dots + 2\alpha_2xy^{a+s-2} + \alpha_1y^{a+s-1}, \\ &\quad , \alpha_{a-2}(s+2)x^{a-2}y^{s+1} + \alpha_{a-3}(s+3)x^{a-3}y^{s+2} + \dots + \\ &\quad + \alpha_1(a+s-1)xy^{a+s-2} + \alpha_0(a+s)y^{a+s-1}, \\ &\quad , x^a \rangle + m_2^{a+\beta+s} \end{aligned}$$

Pela não degenerescência de f , segue que $A_1 \neq 0$ ou $A_0 \neq 0$. Se $\alpha_1 = \alpha_0 = 0$, então $y^{a+\beta+s-1} \notin m_2^\beta \langle \partial f, f \rangle + m_2^{a+\beta+s}$, seguindo que a inclusão não se verifica.

Se $\alpha_1 \neq 0$, então, para reproduzirmos o termo $y^{a+\beta+s-1}$, aparecerão os termos $x^{a-1}y^\beta$ ou $xy^{a+\beta+s-2}$. Para reproduzir $xy^{a+\beta+s-2}$, aparecerão os termos $2\alpha_2xy^{a+\beta+s-2}$ e $x^{a-1}y^\beta$ ou $\alpha_1xy^{a+\beta+s-2}$ e $x^ay^{\beta-1}$ (supondo $\beta \geq 1$), o que mostra ser impossível devido aos termos da forma x^ry^t , com $r+t = a+\beta-1$.

Seja $\alpha_1 = 0$. Suponhamos que exista $i = 2, 3, \dots, a-2$, tal que, $\alpha_{a-i} \neq 0$.

Observando o elemento $y^{a+\beta+s-1}$, do mesmo modo como acima, veremos que é impossível representá-lo com coeficientes em m_2^β , devido aos termos da forma x^ry^t com $r+t = a+\beta-1$, lembrando que $s \geq 1$.

Deste modo, segue que f pode ser dada na forma $x^a + y^{a+s} + h(x,y)$ com $h \in m_2^{a+s+1}$.

Mostremos que $m_2^\sigma \not\subset \langle \partial f, f \rangle$, onde $\sigma = (a-2) + (a+s-2)$.

Se $m_2^\sigma \subset \langle \partial f, f \rangle$, como $a+\beta+s-1 = \lambda_0 + \beta = \alpha(f)$ e $\beta = \beta(f)$, segue que $a+\beta+s-1 \leq \sigma$.

Portanto, de

$$m_2^{a+\beta+s-1} \subset m_2^{\beta \langle \partial f, f \rangle} + m_2^{a+\beta+s}$$

segue que $m_2^\sigma \subset m_2^{\sigma-(a+s-1)} \langle ax^{a-1} + \partial_1 h, (a+s)y^{a+s-1} + \partial_2 h, h \rangle + m_2^{\sigma+1}$.

Como $h \in m_2^{a+s+1}$, então,

$$m_2^\sigma \subset m_2^{\sigma-(a+s-1)} \langle x^{a-1}, y^{a+s-1} \rangle.$$

Portanto,

$$m_2^\sigma \subset \langle x^{a-1}, y^{a+s-1} \rangle$$

Sendo $\sigma = (a-2) + (a+s-2)$ e $x^{a-2}y^{a+s-2} \notin \langle x^{a-1}, y^{a+s-1} \rangle$, temos uma contradição.

Logo, $m_2^\sigma \not\subset \langle \partial f, f \rangle$.

Portanto, f admite uma semi-bom-decomposição.

5.11. acrescentar: $f \neq X_9$.

CAPÍTULO IV

1.3. DEFINIÇÃO: acrescentar $h_i \in m_n^2$, $i = r+1, \dots, t$

CAPÍTULO V

1.10.

(2) onde se lê: $f(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz$

leia-se: $f(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$

